Self-Tuning-Strategien zur Regelung nichtminimalphasiger Regelstrecken

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktor-Ingenieurs

der

Abteilung für Elektrotechnik

an der Ruhr-Universität Bochum

von

Gerhard Nöth

Stuttgart

Bochum 1982

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549226_0014

Self-Tuning-Strategien zur Regelung nichtminimalphasiger Regelstrecken

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktor-Ingenieurs

der

Abteilung für Elektrotechnik

an der Ruhr-Universität Bochum

von

Gerhard Nöth

Stuttgart

Bochum 1982

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung der Ruhr Universität Bochum.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen danke ich sehr herzlich für die wertvollen Anregungen und die großzügige Förderung während der Durchführung der Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Weber gilt mein besonderer Dank für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse und die Übernahme des Mitberichts.

Recht herzlich möchte ich mich auch bei meinen Kollegen für wertvolle Diskussionen und Anregungen bedanken. Nicht zuletzt gilt mein Dank auch Frau P. Kiesel und Frau H. Vollbrecht für ihre Geduld und Ausdauer bei der Reinschrift des Manuskripts.

Dissertation eingereicht am	:	13. Januar 1982
Tag der mündlichen Prüfung	:	19. Februar 1982
Referent	:	Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen
Korreferent	:	Prof. Dr.-Ing. W. Weber

Inhaltsverzeichnis

Seite

1. Einleitung 1

2. Einfache Self-Tuning-Regelstrategie für nicht-minimalphasige Regelstrecken mit einer Nullstelle rechts des Einheitskreises 10

2.1. Der Entwurf des Reglers 11
2.1.1. Die Forderungen an die Modellübergangsfunktion 13
2.1.2. Definition der untersuchten Modellübertragungsfunktion 16
2.1.3. Die Berechnung der Extremwerte 17
2.1.4. Die zweite Bedingung zur Bestimmung der unbekannten Größen ϕ, α, $|p|$ 21
2.1.5. Die dritte Bedingung zur Bestimmung der unbekannten Größen ϕ, α, $|p|$ 22
2.1.6. Numerische Lösbarkeit der Gleichung für ϕ 25
2.1.7. Lösungsverfahren zur Bestimmung des Winkels ϕ 25
2.1.8. Abhängigkeit der übrigen Zeitkenngrößen der Übergangsfunktion vom Wert des maximalen Über- und Unterschwingens 32

2.2. Die Regelkreisstruktur 38
2.2.1. Die Wahl des Beobachterpolynoms und der Einfluß auf die Störübertragungsfunktion 44

2.3. Adaptive Realisierung des Entwurfskonzepts als Self-Tuning-Strategie 47

Seite

2.3.1. Adaptive Realisierung der Berechnung der Reglerparameter und der Modellübertragungsfunktion 47
2.3.2. Das Parameterschätzverfahren zur Bestimmung der Regelstreckenparameter 53
2.3.3. Maßnahmen zur Verhinderung von sogenanntem "Estimator-Windup" 57

3. Einfache Self-Tuning-Regelstrategie für nichtminimalphasige Regelstrecken mit einer Nullstelle links des Einheitskreises 62

3.1. Einführung 62

3.2. Der Entwurf des Reglers 64
3.2.1. Die Forderungen an die Modellübergangsfunktion 64
3.2.2. Der Grundgedanke des Entwurfsverfahrens 66
3.2.3. Der Zusammenhang der Kenngrößen im Zeitbereich zwischen einem PT_2S-Glied ohne Nullstelle und einem PT_2S-Glied mit Nullstelle 70
3.2.3.1. Die Grundgleichungen 70
3.2.3.2. Der Zusammenhang für das Überschwingen e_{max} und die Zeit bis zum Erreichen des Überschwingens t_{max} für ein kontinuierliches PT_2S-Glied mit und ohne Nullstelle 73
3.2.4. Verfahren zur Bestimmung der Pole der Modellübertragungsfunktion bei vorgegebener diskreter Nullstelle der Regelstrecke 78
3.2.4.1. Vorbemerkung 78
3.2.4.2. Der Algorithmus 79
3.2.4.3. Stabilität des Algorithmus 87

Seite

3.2.4.4. Der qualitative Verlauf der diskreten Nullstelle bei konstanter Kreisfrequenz ω_o und konstanter Dämpfung d 90

3.2.4.5. Der qualitative Verlauf der kontinuierlichen Nullstelle des Normierungsfaktors κ in Abhängigkeit von der Dämpfung d und der Kreisfrequenz ω_o bei fester diskreter Nullstelle β 92

3.2.4.6. Drei Beispiele für die Leistungsfähigkeit des Algorithmus 96

3.3. Adaptive Realisierung 107

4. Der erweiterte Self-Tuning-Regler mit Korrekturnetzwerk zur Regelung von nichtminimalphasigen Regelstrecken 109

4.1. Der erweiterte ST-Regler nach Clarke und Gawthrop 109

4.2. Der erweiterte ST-Regler mit Korrekturnetzwerk für die Regelstrecke 111

4.2.1. Der Grundgedanke des Korrekturnetzwerks 111

4.2.2. Das Streckenmodell mit Korrekturnetzwerk für den erweiterten ST-Regler 113

4.2.3. Der Reglerentwurf 114

4.2.4. Der geschlossene Regelkreis 119

4.2.5. Die charakteristische Gleichung des Regelkreises und der Entwurf des Korrekturnetzwerks 123

4.2.6. Die Festlegung der Störübertragungsfunktion 128

4.2.7. Der Zusammenhang zwischen charakteristischer Gleichung und Zählerpolynom der Störübertragungsfunktion 130

Seite

4.2.8. Die Bewertung des Führungssignals 133

4.3. Adaptive Realisierung 134
4.3.1. Die Berechnung des momentanen Stellsignals 140

5. Ergebnisse 141

5.1. Testprozesse und Testbedingungen 141

5.2. Wahl des Identifikationsverfahrens 145

5.3. Entwurfsspezifikationen und Anwendbarkeit auf die verschiedenen Testprozesse 146
5.3.1. Spezifikationen für die ST-Regelstrategie für nichtminimalphasige Regelstrecken mit einer Nullstelle rechts des Einheitskreises 146
5.3.2. Spezifikationen für die ST-Regelstrategie mit einer Nullstelle links des Einheitskreises 148
5.3.3. Spezifikationen für die ST-Regelstrategie mit Kompensationsnetzwerk 150

5.4. Anpassungsgeschwindigkeit 151

5.5. Beurteilung 152

6. Zusammenfassung 193

Literatur 195

Seite

ANHANG A.1. DER MINIMUM-VARIANZ-REGLER 199

A.1.1. Herleitung des MV-Reglers 201

A.1.2. Stabilitätsbetrachtung des geschlossenen Regelkreises 205

A.1.3. Erweiterungen des MV-Reglers 206
A.1.3.1. Erweiterung für nichtminimalphasige Regelstrecken 206
A.1.3.2. Erweiterung durch Vorgabe einer Störübertragungsfunktion (Aström (1970)) 209

A.1.4. Erweiterung des MV-Reglers durch Bewertung der Stellgröße 211
A.1.4.1. Herleitung des Stellgesetzes mit einer Bewertung des aktuellen Stellsignals 212
A.1.4.2. Stabilitätsbetrachtung des geschlossenen Regelkreises 213

ANHANG A.2. DER SELF-TUNING-REGLER 215

A.2.1. Herleitung des ST-Reglers 217

A.2.2. Stabiles Verhalten des ST-Reglers 221

A.2.3. Konvergenz des ST-Reglers 222
A.2.3.1. Die Bedingungen für die Konvergenz der gewöhnlichen Differentialgleichungen nach Ljung für den ST-Regler 222
A.2.3.2. Untersuchung mit der Hyperstabilitätsmethode 224
A.2.3.3. Vergleich der beiden Methoden nach Ljung (1977a,b) und Schmid (1979) 234

Seite

A.2.4. Führungsgrößenregelung 234

A.2.5. Erweiterung des ST-Reglers durch Bewertung von Führungsgröße und Stellgröße (Clarke und Gawthrop (1975)) 237

A.2.5.1. Darstellung des geschlossenen Regelkreises und der Führungs- und Störbetrachtungsfunktion 243

ANHANG A.3. DIE BESTIMMUNG DER DÄMPFUNG d UND DER KREISFREQUENZ ω_o FÜR EIN PT_2S-GLIED MIT EINER NULLSTELLE BEI S GLEICH EINS 246

ANHANG A.4. DER ZUSAMMENHANG FÜR DIE VERZUGSZEIT t_{50} UND DIE ANSTIEGSZEIT T_{a50} FÜR EIN PT_2S-GLIED MIT UND OHNE NULLSTELLE 249

A.4.1. Der Zusammenhang für die Verzugszeit t_{50} für ein kontinuierliches PT_2S-Glied mit und ohne Nullstelle 249

A.4.2. Der Zusammenhang für die Anstiegszeit T_{a50} für ein kontinuierliches PT_2S-Glied mit und ohne Nullstelle 252

ANHANG A.5. NÄHERUNGSFORMELN ZUR BERECHNUNG DER VERZUGSZEIT t_{50} UND DER ANSTIEGSZEIT T_{a50} FÜR EIN PT_2S-GLIED OHNE NULLSTELLE 255

ZUSAMMENSTELLUNG DER WICHTIGSTEN FORMELZEICHEN 257

1. Einleitung

Viele Entwurfsverfahren für Regelkreise setzen eine genaue Kenntnis und konstantes dynamisches und statisches Verhalten der Regelstrecke voraus. Für eine Reihe von technischen Prozessen sind beide Forderungen erfüllt. Für den Fall kleiner Parameterschwankungen kann mit den Mitteln der Empfindlichkeitsanalyse oder durch umfangreiche Simulationen ein parameterunempfindlicher Entwurf erreicht werden. Verändern sich die dynamischen Eigenschaften der Regelstrecke in sehr weiten Grenzen, muß der Regler den Veränderungen angepaßt werden. Dies kann z. B. bei stark wechselnden, aber bekannten Betriebsbedingungen durch Umschalten zwischen verschiedenen Reglern oder durch Verwendung verschiedener Regelkreisstrukturen geschehen. Falls dies nicht möglich ist, muß der Regelkreis durch ein übergeordnetes Anpassungssystem zu einem adaptiven Gesamtsystem erweitert werden. Das übergeordnete Anpassungssystem erfüllt dabei die Aufgaben der Erfassung der momentanen Regelstreckendynamik und die Anpassung des Reglers zur Erreichung vorgegebener Eigenschaften des Gesamtregelkreises. Entsprechend den vorgegebenen Eigenschaften des Regelkreises und der Entwurfsmethodik ergeben sich für ein adaptives Gesamtsystem eine Vielzahl von Entwurfsmöglichkeiten. Die komplizierte Struktur setzt einen hohen Aufwand für die Realisierung und eine gute Kenntnis der Entwurfssystematik voraus. Eine systematische Übersicht und ein Leistungsvergleich der gebräuchlichsten adaptiven Verfahren findet sich bei Schmid (1979).

Bei einer Reihe technischer Prozesse, wie z. B. Papiermaschinen, Erzmühlen, chemische Reaktoren (Aström et al (1977)) liegen die Verhältnisse anders. Diese technischen Prozesse verarbeiten Rohprodukte, die sich in ihrer Zusammensetzung je nach Lieferung ändern und damit auch eine veränderte Dynamik des Prozesses bewirken. Meist ist eine ausführliche Systemanalyse aus betrieblichen Gründen nicht möglich oder durchführbar. Auf der anderen Seite sind die dafür notwendigen Experimente in der Regel sehr zeitaufwendig. Für die Regelung derartiger Prozesse wurde von Aström und Wittenmark (1972, 1973) ein Konzept vorgeschlagen, das zwischen dem sehr umfassenden Konzept einer adaptiven Regelung und dem "klassischen" Konzept eines festen Reglers einzuordnen ist. Die-

sem Reglerkonzept, das von den Autoren mit dem Namen "Self-Tuning-Regler" bezeichnet wurde und ursprünglich für Regelstrecken mit festen, aber unbekannten Koeffizienten entwickelt wurde, liegt die in Bild 1.1.1 dargestellte einfache Struktur zugrunde.

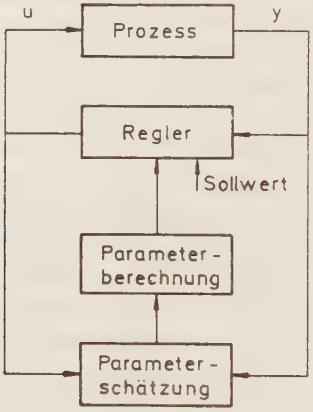

Bild 1.1.1. Self-Tuning-Regelstruktur

Dabei wurde die feste, unbekannte Dynamik des Prozesses mit Hilfe eines leistungsfähigen Parameterschätzverfahrens im Betrieb bestimmt. Die Identifikationsergebnisse dienen als Grundlage der Berechnung der Reglerparameter. Wichtige Grundlage dieser Struktur ist dabei das "Gewißheits-Prinzip" (certainty principle) aus der Theorie der Regelung stochastischer Systeme. Dieses Prinzip bedeutet, daß die die Dynamik der Regelstrecke beschreibenden Parameter als wahre Parameter betrachtet werden und als Grundlage der Reglerberechnung dienen.

Die starke Verbreitung und industrielle Anwendung, die derartige Regelalgorithmen in den letzten 5 bis 8 Jahren gefunden haben (Unbehauen (1980), IFAC-Symposium (1979)) hat verschiedene Ursachen:

- Die Verdrängung der analogen Gerätetechnik durch Prozeßrechner und vor allem in jüngster Zeit durch leistungsfähige Mikrorechner ebnete den Weg für die Entwicklung leistungsfähiger Parameter-

schätzverfahren. Gleichzeitig gelang es, die Leistungsfähigkeit nicht nur anhand von Identifikationen von Modellprozessen, sondern auch anhand von Identifikationen von industriellen Prozessen nachzuweisen. Ihre Anwendung ist dabei ohne den Einsatz von Prozeßrechnern kaum denkbar.

- Die Verwendung von Prozeßrechnern führte in sehr starkem Maße zur Benutzung einer diskreten Systembeschreibung. Das Self-Tuning-Regelkonzept (ST-Regelkonzept) basiert auf einer diskreten Systembeschreibung.

- Die relativ einfache und übersichtliche Struktur bietet die Möglichkeit, das ST-Regelkonzept gerade auch bei industriellen Prozessen anzuwenden. So kann z. B. häufig ein bereits vorhandenes industrielles DDC-System als Regler benutzt werden, während die Parameterschätzung und die Berechnung der Reglerparameter unabhängig davon geschehen. Außerdem besteht auch die Möglichkeit, das gesamte ST-Regelkonzept auf einen Mikrorechner zu implementieren (Clarke und Gawthrop (1979b)).

- Der erste von Aström und Wittenmark (1972) vorgeschlagene ST-Regler war für eine stochastisch gestörte Regelstrecke entworfen. Er stellte damit einen Entwurf für eine Klasse von Regelstrecken dar, deren Regelung seither in der industriellen Anwendung kaum unter diesem Gesichtspunkt geschehen war. Zudem machte der ST-Regler eine ausgefeilte Analyse des Störprozesses in gewisser Weise überflüssig.

- Das ST-Regelkonzept bietet auch die Möglichkeit, bei bereits im Betrieb befindlichen DDC-Algorithmen eine Optimierung der Parameter im laufenden Betrieb vorzunehmen. Bei festen Reglern ist es in der Regel nicht möglich, mehr als zwei bis drei Parameter zu optimieren. Dies geschieht am besten mittels der Auswertung von Übergangsfunktionen oder Gewichtsfunktionen. Sie sind im laufenden Betrieb nur mit großem Aufwand zu gewinnen.

  Für den ST-Regler sind eine Reihe von Anwendungsfällen bekannt (Åström et al (1977)), bei denen im laufenden Betrieb sechs bis acht Parameter ohne größere Schwierigkeiten optimiert werden konnten.

- Ein sehr wesentlicher Grund für die zahlreiche Verwendung von ST-Regelkonzepten hängt sicherlich mit den eindrucksvollen industriellen Anwendungen zusammen. Bei der Regelung einer Papiermaschine (Borisson und Wittènmark (1974), Cegrell und Hedqvist (1974)), eines Erzbrechers (Borisson und Syding (1976)) und eines Supertankers (Kallström et al (1978)) konnten gute Erfolge erzielt werden.

Diesen Erfolgen stehen allerdings auch einige Nachteile der ST-Regelstrategien gegenüber.

- Aufgrund der Struktur des ursprünglichen Konzepts zur Erzielung minimaler Varianz bei der Ausregelung stochastischer Störungen zeichnet sich der von Åström und Wittenmark eingeführte ST-Regler durch relativ große Stellsignale aus.

- Eine Führungsgrößenregelung ist nur durch die zusätzliche Einführung eines Integrators im Regler möglich. Da es sich bei der einfachen ST-Regelstrategie um einen Entwurf mit nur einem Freiheitsgrad handelt, ist eine unabhängige Spezifikation der Führungsübertragungsfunktion nicht möglich.

- Eine Spezifikation von Führungsübertragungsfunktionen in Form von Übertragungsfunktionen oder in der Form von Kenngrößen der Übergangsfunktionen war nicht möglich.

- Es konnte nicht sichergestellt werden, unter welchen Bedingungen die Reglerparameter gegen die optimalen Werte konvergieren.

- Die ST-Regelstrategie auf der Basis eines stochastischen Entwurfs fordert Minimalphasigkeit der Regelstrecke.[1] Diese Forderung (falls sie nicht erfüllt wird, ist ein unbeschränktes Stellsignal die Folge), wirkt sich bei einer diskreten Systembeschreibung sehr viel schärfer aus, als dies bei einer kontinuierlichen Systembeschreibung der Fall wäre. Gerade für Regelstrecken höherer Ordnung und Regelstrecken mit integralem

---

[1] Unter Minimalphasigkeit einer Übertragungsfunktion soll im folgenden verstanden werden, daß sämtliche Nullstellen innerhalb des Stabilitätsgebietes liegen. Bei Nichtminimalphasigkeit liegt mindestens eine Nullstelle außerhalb des Stabilitätsgebiets.

Verhalten treten sehr häufig bei der Diskretisierung nichtminimalphasige Nullstellen auf.

Ein Teil dieser Nachteile konnte inzwischen beseitigt werden. Clarke und Gawthrop (1975, 1979a,b), Gawthrop (1977) erweitern das ursprüngliche Konzept, um eine Bewertung der Stellenergie und eine Führungsgrößenregelung zu ermöglichen. Diese von ihnen eingeführte Erweiterung kann bei genügender Kenntnis der Regelstrecke zur Beseitigung der Nichtminimalphasigkeit für die ST-Regelstrategie dienen.

Für den Fall der einfachen ST-Regelstrategien, wie sie von Åström und Wittenmark (1972, 1973) und Clarke und Gawthrop (1975, 1979a,b), Gawthrop (1977) dargestellt wurden und bei denen durch einen modifizierten Modellansatz eine Berechnung der Reglerparameter vermieden werden konnte (siehe Anhang A1 und A2), gelang es inzwischen, die Bedingungen, unter denen die Regelstrategie im Grenzfall die optimalen Eigenschaften besitzt, nachzuweisen.

Eine Erweiterung und damit auch die Möglichkeit zur vielseitigen Anwendung erfuhr das ST-Konzept in Verbindung mit Reglerentwürfen zur Vorgabe gewünschter Führungsübertragungsfunktionen (Åström et al (1978)).

Kennzeichnend für diese Art des Entwurfs sind folgende Eigenschaften:

- Die Reglerstruktur wird als Struktur mit zwei Freiheitsgraden gewählt. Diese Struktur bietet den Vorteil, daß der Regler, der als Kompensationsregler entworfen wird, sowohl für stabile als auch für instabile Regelstrecken entworfen werden kann.

- Die Berechnung der Reglerparameter erfolgt durch Lösung einer Polynomgleichung. Falls die Regelstrecke nichtminimalphasige Nullstellen besitzt, kann durch Aufspalten des Regelstreckenmodells in nichtminimalphasige und minimalphasige Anteile auch für diese Fälle ein Regler gewonnen werden.

- Die Verwendung einer Polynomgleichung bzw. bei direkter Schätzung die Verwendung eines nichtlinearen Schätzverfahrens lassen eine

Konvergenzbetrachtung analog zu den ursprünglich vorgeschlagenen Regelstrategien auf der Basis eines stochastischen Entwurfs nicht zu. Simulationsergebnisse zeigen allerdings sehr befriedigende Resultate.

- Ein Einfluß auf die Auswirkungen deterministischer Störungen durch geschickte Ausnutzung der beiden Freiheitsgrade erfolgt in der Regel - mit Ausnahme bei stochastischen Störungen - nicht.

Die Verwendung eines ausschließlich deterministischen Entwurfsprinzips bedeutet eine wesentliche Reduzierung der für die Anwendung notwendigen Kenntnisse der Regelung stochastischer Systeme und eine gleichzeitige Orientierung der Entwurfsmethodik für die Führungsübertragungsfunktionen an den "klassischen" Verfahren. Dies wird noch deutlicher an dem neuen Vorschlag von Wittenmark und Åström (1980), die Regelstrecke durch ein Modell zweiter Ordnung anzunähern. Die beiden Autoren schlagen als Führungsübertragungsfunktion eine Übertragungsfunktion mit zwei konjugiert komplexen Polen ohne Nullstelle vor. Dieser Vorschlag wird damit begründet, daß zwar eine Reihe von technischen Prozessen aus Gründen der Parameterschwankungen eine ST-Regelstrategie notwendig machen, aber eine Approximation durch ein Modell höherer Ordnung nicht notwendig ist. Der entsprechende Regler besitzt gemäß ihrem Vorschlag fünf Parameter und kommt in seinem dynamischen Verhalten dem immer noch sehr häufig verwendeten PID-Regler sehr nahe. In Kombination mit einem Parameterschätzverfahren besitzt er allerdings den wesentlichen Vorteil einer Anpassung an die laufenden Betriebszustände und dynamischen Eigenschaften der Regelstrekke. Nicht beeinflußbar ist sowohl bei dem allgemeinen Entwurf für Führungsgrößenregelung als auch bei dem vereinfachten Entwurf mit einem Regelstreckenmodell niedriger Ordnung der Einfluß von nichtminimalphasigen Nullstellen. Da die Nullstellen nicht kompensiert werden können, wirkt sich eine etwaige Änderung unmittelbar auf die Führungsübertragungsfunktion aus.

Ziel dieser Arbeit ist es, für den vereinfachten Entwurf eine etwas andere Fragestellung einzuführen. Die Frage:

> Wie muß der Regler beschaffen sein, damit die Führungsübertragungsfunktion mit Ausnahme der evtl. variierenden nichtminimalphasigen Nullstelle konstant bleibt?

wird durch folgende Frage ersetzt:

> Wie muß die Führungsübertragungsfunktion beschaffen sein, daß vorgegebene Kenngrößen der Übergangsfunktion erreicht werden? Wie muß in diesem Fall der Regler beschaffen sein?

Diese zweite Fragestellung besitzt gegenüber der ersten Fragestellung zwei wesentliche Vorteile.

Das Verhalten der Führungsübertragungsfunktion wird mittels Kenngrößen der Übergangsfunktion vorgegeben und nicht umgekehrt. Eventuell vorgegebene Schranken, wie sie bei technischen Prozessen sehr oft in Form von maximalem Überschwingen vorgegeben werden, beeinflussen direkt den Reglerentwurf.

Treten Parameterschwankungen insbesondere der nicht kompensierbaren (nicht kürzbar), nichtminimalphasigen Nullstellen auf, so wird ihr Einfluß durch eine entsprechende Modifikation der Führungsübertragungsfunktion vermindert. In Verbindung mit einer ST-Regelstrategie kann damit erreicht werden, daß der Einfluß von Parameterschwankungen vermindert wird.

Damit ergibt sich eine neue ST-Regelstrategie mit einer zweistufigen Berechnung des Reglers. Aufgrund der Identifikation und der daraus gewonnenen Kenntnis über die Nichtminimalphasigkeit der Regelstrecke wird in Abhängigkeit der gewünschten Kenngrößen der Übergangsfunktion eine entsprechende Führungsübertragungsfunktion berechnet. In einem zweiten Schritt können dann die Reglerparameter gewonnen werden.

Da der Zusammenhang zwischen einer Führungsübertragungsfunktion und den Kenngrößen der Übergangsfunktion durch nichtlineare Funktionen bestimmt wird, kommt es entscheidend auf eine sinnvolle Struktur der Führungsübertragungsfunktion an. Gleichzeitig ist eine geschickte Wahl aussagekräftiger Kenngrößen notwendig. Aus diesen Gründen ist es sinnvoll, eine Übertragungsfunktion 2. Ordnung mit zwei konjugiert komplexen Polen mit einer nicht-

minimalphasigen Nullstelle zu betrachten. Diese Wahl ist aus mehreren Gründen gerechtfertigt:

- Die Nichtminimalphasigkeit einer Regelstrecke kann - vor allem bei niedrigen Ordnungen - durch eine nichtminimalphasige Nullstelle beschrieben werden.

- Für ein System zweiter Ordnung können die Schnelligkeit bzw. Bandbreite und das Überschwingen fast unabhängig voneinander beeinflußt werden.

- Aufgrund der konjugiert komplexen Pole ist ein geringerer Stellaufwand als bei reellen Polen zu erwarten.

Für die Betrachtung des Einflusses der nichtminimalphasigen Nullstellen müssen zwei Bereiche unterschieden werden. Tritt eine Nullstelle im Bereich rechts des Einheitskreises auf, so kann dies als der Einfluß eines allpaßhaltigen Regelstreckenanteils charakterisiert werden. Eine geschickte Wahl der Kenngrößen und die notwendigen Bedingungen für die Führungsübertragungsfunktion werden in Kapitel 2 dargestellt und für die Verwendung zusammen mit einer ST-Regelstrategie aufbereitet. Treten in der diskreten Beschreibung der Regelstrecke nichtminimalphasige Nullstellen links des Einheitskreises auf, so ist eine Kompensation durch Reglerpole ebenfalls nicht möglich, da ein unbeschränktes Stellsignal die Folge wäre. Der Einfluß derartiger Nullstellen auf die Kenngrößen wird in Kapitel 3 abgeleitet. Daran anschließend wird ein iterativer Algorithmus vorgeschlagen, der die Möglichkeit bietet, durch eine spezielle Wahl der Führungsübertragungsfunktion den Einfluß der Nullstelle nahezu auszuschalten. Dieser Algorithmus bietet auch die Möglichkeit, minimalphasige Nullstellen, die bei einer Kompensation durch den Regler sehr unruhige Stellsignale bewirken würden, ebenfalls mit einzubeziehen. Die Verwendung dieses iterativen Algorithmus zusammen mit einem ST-Regelalgorithmus wird näher beschrieben.

In Kapitel 4 wird eine Modifikation des von Clarke und Gawthrop vorgeschlagenen erweiterten ST-Reglers für stochastische Störungen vorgestellt. Die von den beiden Autoren vorgeschlagene Struktur bietet,wie oben erwähnt,die Möglichkeit, falls eine zusätzliche Bewertung der Führungsgröße und des Stellsignals und der Ausgangsgröße erfolgt, die Bedingung der Nichtminimalphasigkeit zu umgehen. Dabei ist allerdings der Einfluß auf die Nichtminimalphasigkeit und die Beeinflussung der Störübertragungsfunktion und der Stellgröße miteinander verkoppelt und nicht unabhängig wählbar. Die Einführung eines zur Regelstrecke parallelen Kompensationsnetzwerkes, die von Hahn (1980) für ein modelladaptives Verfahren verwendet wurde, wird hier auf den ST-Regler übertragen. Damit kann eine neue Struktur gewonnen werden, die einen größeren Freiheitsgrad in der Beeinflussung der Stör- und Führungsübertragungsfunktion zuläßt.

In Kapitel 5 werden die Ergebnisse der Simulation der vorgeschlagenen ST-Strategie an 4 Testprozessen, darunter einem aus Meßdaten gewonnenen Modell eines Hochofens zusammengefaßt und dargestellt. Diese Ergebnisse ermöglichen eine abschließende Beurteilung.

2. Einfache Self-Tuning-Regelstrategie für nichtminimalphasige Regelstrecken mit einer Nullstelle rechts des Einheitskreises

ST-Regelstrategien, die sich als Kombination eines leistungsfähigen Parameterschätzverfahrens mit einem Kompensationsreglerentwurf beschreiben lassen, können in zwei Stufen entwickelt werden.

In der ersten Stufe wird ein für die Problemstellung geeigneter Kompensationsreglerentwurf für die vorgegebene Problemstellung entwickelt. In einer zweiten Stufe erfolgt die Kombination des Entwurfs mit einem Parameterschätzverfahren zu einer ST-Regelstrategie. Die sehr zahlreichen Kombinationsmöglichkeiten unterschiedlicher Kompensationsreglerentwürfe und verschiedener Parameterschätzverfahren werden allerdings durch folgende Forderungen eingeschränkt.

- Aus rechentechnischen Gründen sollten Entwürfe, die aufwendige Lösungsmethoden erfordern, wie z. B. die Lösung einer Matrix-Riccati-Gleichung für zahlreiche Abtastschritte oder iterative Verfahren, wie z. B. Parameteroptimierungsverfahren, nach Möglichkeit vermieden werden. Da im allgemeinen zu jedem Abtastschritt der ST-Regelstrategie der Entwurf aufgrund der neu identifizierten Parameter erfolgt, bedeuten sehr komplizierte Verfahren enorme Rechenzeiten und können oft alleine aus diesen Gründen nicht in ein konventionelles DDC-System integriert werden.

- Entwurfsverfahren, die sehr empfindlich gegenüber Parameterschwankungen sind, sollten ebenfalls vermieden werden, da eine zusätzliche Überprüfung, ob es sich um einen sinnvollen Entwurf handelt, sehr viel Aufwand erfordert. Es empfiehlt sich deshalb, parameterunempfindliche Algorithmen zu wählen.

Für ST-Regelstrategien niedriger Ordnung (Wittenmark und Åström (1980)) lassen sich die obigen Forderungen gut erfüllen, zumal für eine ganze Reihe von industriellen Prozessen ein Modell niedriger Ordnung durchaus angemessen ist.

Im folgenden wird eine ST-Regelstrategie für die Regelung von nichtminimalphasigen Regelstrecken mit einer Nullstelle rechts des Einheitskreises vorgestellt. Im Abschnitt 2.1 werden die Forderungen hinsichtlich des Entwurfs entwickelt. Im Abschnitt 2.2 wird auf die Regelkreisstruktur näher eingegangen, und im Abschnitt 2.3 werden dann die notwendigen Ergänzungen zur Realisierung als ST-Regelstrategie dargestellt.

2.1. Der Entwurf des Reglers

Bei sehr vielen adaptiven Verfahren, wie z. B. bei Modell-Vergleichs-Verfahren und allen ST-Regelstrategien, wird als Regler ein Kompensationsregler benutzt. Der Regler besitzt dabei die Aufgabe, die dynamischen Eigenschaften der Regelstrecke so zu kompensieren, daß entweder die Führungsübertragungsfunktion oder die Störübertragungsfunktion ein bestimmtes dynamisches Verhalten aufweist. Entsprechend Bild 2.1.1 ergeben sich damit als Grundgleichungen für den Kompensationsregler:

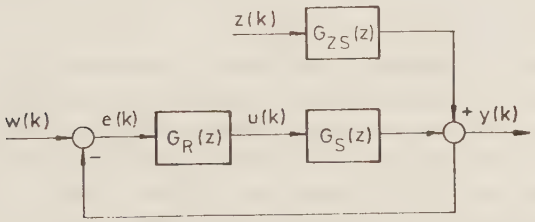

Bild 2.1.1. Blockschaltbild eines Regelkreises für Führungsgrößenregelung

Bei Führungsgrößenregelung aus der Forderung

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = G_W(z) \tag{2.1.1}$$

$$G_R(z) = \frac{1}{G_S(z)} \frac{G_W(z)}{1-G_W(z)} \tag{2.1.2}$$

und bei Störgrößenregelung aus der Forderung

$$\frac{Y(z)}{Z(z)} = G_Z(z) \tag{2.1.3}$$

$$G_R(z) = \frac{1}{G_S(z)} \frac{G_{ZS}(z)-G_Z(z)}{G_Z(z)} \; . \tag{2.1.4}$$

Falls die Regelstrecke nichtminimalphasige Nullstellen besitzt, muß für die Führungs- und Störübertragungsfunktion vorausgesetzt werden, daß die nichtminimalphasigen Nullstellen Bestandteil der Führungs- bzw. Störübertragungsfunktionen sind. Ist dies nicht der Fall, wird das Stellsignal unbeschränkt.

Beim Reglerentwurf für eine nicht sprungfähige Regelstrecke niedriger Ordnung mit maximal zwei Nullstellen tritt meist nur eine nichtminimalphasige Nullstelle auf. Sie kann sehr leicht aus dem Zählerpolynom der Regelstrecke gewonnen werden und als Teil der gewünschten Führungsübertragungsfunktion betrachtet werden. In dem hier vorgestellten Entwurf wird die gewünschte Führungsübertragungsfunktion allerdings nicht - wie meistens üblich - als Übertragungsfunktion vorgegeben, sondern aufgrund vorgegebener Kenngrößen der Übergangsfunktion berechnet. Damit kann - wie schon in der Einleitung betont - die Frage, wie der Regler beschaffen ist, damit eine feste Führungsübertragungsfunktion erreicht wird, welche die nichtminimalphasige Nullstelle der Regelstrecke mit einschließt, durch die Frage ersetzt werden, wie die Führungsübertragungsfunktion und der entsprechende Regler beschaffen ist, damit vorgeschriebene Kenngrößen der Übergangsfunktion erreicht werden. Diese neue Fragestellung ist gerade für die spätere Verwendung des Entwurfs als ST-Regelstrategie interessant, da bei Verwendung einer sich anpassenden Regelstrategie die Kenngrößen auch weiterhin eingehalten werden können. Damit kann der Einfluß der Verschiebung der nichtminimalphasigen Nullstelle zwar nicht beseitigt, aber zumindest in seiner Auswirkung verringert werden.

Für die gewünschte Führungsübertragungsfunktion (im folgenden auch Modellübertragungsfunktion genannt) wird eine Übertragungsfunktion zweiter Ordnung mit einer Nullstelle (nichtminimalphasig) gewählt. Die Beschränkung auf eine Modellübertragungsfunktion zweiter Ordnung mit einer nichtminimalphasigen Nullstelle und zwei konjugiert komplexen Polen wird im Hinblick auf die spätere Verwendung als ST-Regelstrategie getroffen. Für eine derartige Übertragungsfunktion kann der Zusammenhang zwischen den gewählten Zeitkenngrößen und den Parametern der Übertragungsfunktionen noch analytisch angegeben werden. Für Übertragungsfunktionen höherer Ordnung geht dieser Zusammenhang verloren. Damit müßte bei der Verwendung als ST-Regelstrategie in jedem Schritt ein Parameteroptimierungsproblem gelöst werden, was zu einem nicht mehr vertretbaren rechentechnischen Aufwand führen würde.

Für viele Regelstrecken, die nicht durch ein Modell zweiter Ordnung angenähert werden können, ist es dennoch möglich, eine Modellübertragungsfunktion zweiter Ordnung zu wählen, falls die Regelstrecke nur eine nichtminimalphasige Nullstelle besitzt. Als Realisierungsbedingung für den Regler gilt, daß der Absolutkoeffizient des Nennerpolynoms vorhanden sein muß.

2.1.1. Die Forderungen an die Modellübergangsfunktion

Bei vorgegebener nichtminimalphasiger Nullstelle und vorgegebenem Verstärkungsfaktor der Modellübertragungsfunktion sind zwei Parameter, nämlich Dämpfung und Eigenfrequenz wählbar. Mit diesen beiden Faktoren lassen sich im Zeitbereich ebenfalls zwei Kenngrößen festlegen. Eine Einschränkung auf Kenngrößen der Übergangsfunktion erscheint sinnvoll, da die meisten Forderungen an den geschlossenen Regelkreis in Form von Kenngrößen sich auf die Übergangsfunktion beziehen.

Eine Nullstelle der Regelstrecke rechts des Einheitskreises bewirkt ein Unterschwingen der Übergangsfunktion, d. h. bei posi-

tivem Eingangssprung bewegt sich das Ausgangssignal kurzzeitig in die negative Richtung, um dann anschließend den positiven Endwert zu erreichen. Ein typischer Verlauf der Übergangsfunktion ist in Bild 2.1.2 dargestellt. Je näher die Nullstelle sich am Einheitskreis befindet, desto stärker wird das jeweilige Unterschwingen.

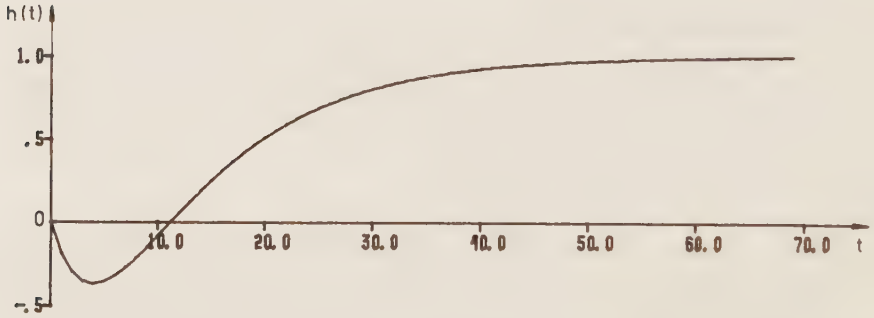

Bild 2.1.2. Typische Übergangsfunktion eines PT_2-Glieds mit nichtminimalphasiger Nullstelle

An die Modellübergangsfunktion soll im folgenden die Forderung nach betragsmäßig gleichem Über- und Unterschwingen gestellt werden. Diese Forderung hat zur Folge, daß bei Änderung des Sollwerts in die eine oder andere Richtung vorgegebene Maximalwerte nicht überschritten werden. Damit kann das Überschreiten zulässiger physikalischer Maximalwerte bei industriellen Regelungsprozessen, wie z. B. Nennströme bei Motoren oder Abweichungen vom zulässigen Fahrbereich eines Schiffes bei Kursänderungen, eingehalten werden. Nach Vorgabe von gleichem Über- und Unterschwingen sind die anderen Kenngrößen der Übergangsfunktion, wie z. B. die Anstiegszeit T_{a50}, automatisch festgelegt. Eine Verkürzung dieser Zeiten kann nur unter der Bedingung, daß größeres Über- und Unterschwingen zugelassen wird, erreicht werden. Eine Verkürzung der Anstiegszeit bei gleichem Über- und Unterschwingen könnte nur durch Einführung eines zusätzlichen Pol-Nullstellenpaars erreicht werden.

Ein typischer Verlauf der Modellübergangsfunktion bei unterschiedlichem Über- und Unterschwingen und bei gleichem Über- und Unterschwingen ist in Bild 2.1.3a und 2.1.3b dargestellt.

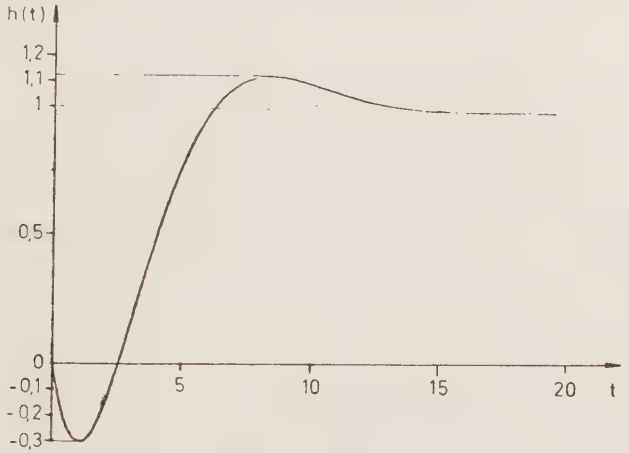

Bild 2.1.3a. Modellübergangsfunktion bei unterschiedlichem Über- und Unterschwingen

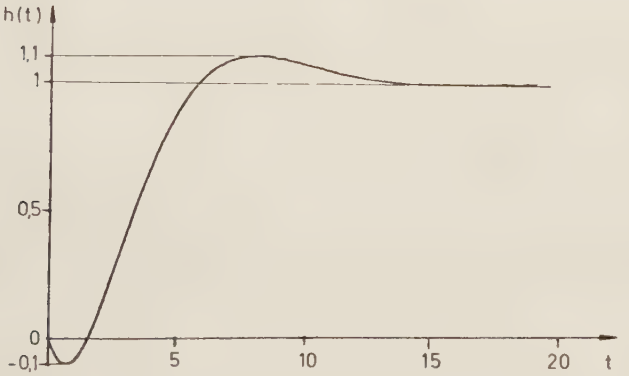

Bild 2.1.3b. Modellübergangsfunktion bei gleichem Über- und Unterschwingen

2.1.2. Definition der untersuchten Modellübertragungsfunktion

Die untersuchte Modellübertragungsfunktion mit der Pol-Nullstellenverteilung gemäß Bild 2.1.4 wird wie folgt beschrieben:

$$G_W(z) = \frac{K(z-\beta)}{(z-p)(z-\bar{p})} , \qquad \beta > 1 . \tag{2.1.5}$$

β stellt dabei die nichtminimalphasige Nullstelle und p und $\bar{p}$ das konjugiert komplexe Polpaar dar.

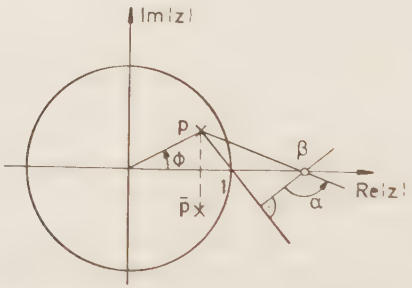

Bild 2.1.4. Lage der Nullstelle und der Pole in der z-Ebene

K sei so gewählt, daß $G_W(1) = 1$. Damit lautet die z-Transformierte der Sprungantwort h(kT)

$$H(z) = \frac{zK(z-\beta)}{(z-p)(z-\bar{p})(z-1)} . \tag{2.1.6}$$

Unter Zuhilfenahme der Winkel α und ϕ kann die Übergangsfunktion bei einer Pol-Nullstellen-Konfiguration gemäß Bild 2.1.4 für diskrete Zeiten k wie folgt angegeben werden (Lindorff (1965)):

$$h(k) = 1 - \frac{|p|^k}{\cos\alpha} \cos(k\phi + \alpha) . \tag{2.1.7}$$

Die Werte h(k) sind die Abtastwerte der in t stetigen und differenzierbaren Funktion h(t):

$$h(t) = 1 - \frac{|p|^t}{\cos\alpha} \cos(t\,\phi + \alpha) \qquad (2.1.8)$$

h(t) kann differenziert werden, um die Extremwerte und damit das maximale Über- und Unterschwingen zu bestimmen.

Gelingt es nun, aus den vorgegebenen Werten für Über- und Unterschwingen und der Bedingung, daß die Übergangsfunktion zum Zeitpunkt des ersten Extremwerts den Wert des maximalen Unterschwingens und zur Zeitpunkt des zweiten Extremwerts den Wert des maximalen Überschwingens erreicht, die Werte für p, α und φ zu bestimmen, so ist die Übergangsfunktion vollständig gegeben. Aus der Kenntnis dieser Größen läßt sich dann bei bekannter Nullstelle unter Benutzung von Bild 2.1.4 die Übertragungsfunktion gemäß Gl.(2.1.5) vollständig berechnen.

2.1.3. Die Berechnung der Extremwerte

Die in Bild 2.1.3 dargestellte Übergangsfunktion ergibt sich gemäß Gl.(2.1.8) bzw. mit den Abkürzungen

$$c = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad b = |p|$$

zu

$$h(t) = 1 - cb^t \cos(t\phi + \alpha)\,. \qquad (2.1.9)$$

Die Extremwerte lassen sich durch Nullsetzen der ersten Ableitung gewinnen. Es ergibt sich

$$\frac{dh}{dt} = -\,cb^t \ln b \cos(t\phi+\alpha) + \phi cb^t \sin(t\phi+\alpha)$$

$$= cb^t(-\ln b \cos(t\phi+\alpha) + \phi\sin(t\phi+\alpha)) \stackrel{!}{=} 0$$

und mit $c \neq 0$, $b \neq 0$

$$\tan(t\phi+\alpha+\nu\pi) = \frac{\ln b}{\phi}, \qquad \nu = 1,2,\ldots \qquad (2.1.10)$$

Für den Zeitpunkt t_u, für den das erste Extremum h_{min} erreicht wird, ergibt sich aus den Bedingungen $t_u > 0$ und der Bedingung, daß die konjugiert komplexen Pole innerhalb des Einheitskreises liegen und damit $\ln b < 0$ gilt

$$t_u = \left(\operatorname{arctg}\frac{\ln b}{\phi} - \alpha + \pi\right)\frac{1}{\phi} \quad . \tag{2.1.11}$$

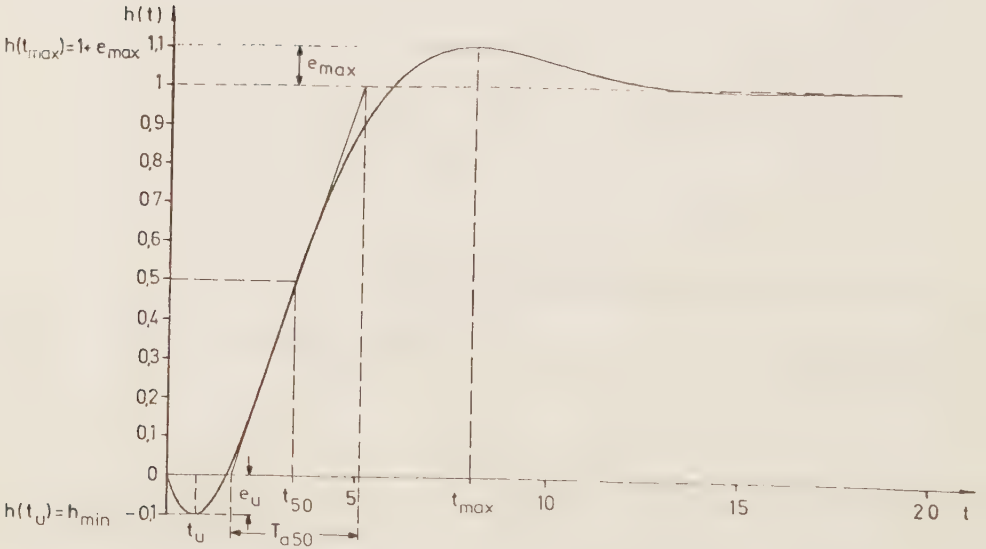

Bild 2.1.5. Typische Übergangsfunktion bei einer Nullstelle rechts vom Einheitskreis für gleiches Über- und Unterschwingen

Der zweite Extremwert, für den das maximale Überschwingen erreicht wird, liegt bei

$$t_{max} = \left(\operatorname{arctg}\frac{\ln b}{\phi} - \alpha + 2\pi\right)\frac{1}{\phi} \tag{2.1.12}$$

vor.

Für den Wert der Übergangsfunktion gemäß Bild 2.1.5 an der Stelle t_u ergibt sich mit den Gln.(2.1.9) und (2.1.11)

$$h_{min} = h(t_u) = 1-c\ b^{t_u}\ (\cos(\operatorname{arctg}\frac{\ln b}{\phi} - \alpha+\pi)\ \frac{\phi}{\phi} + \alpha)$$

$$= 1-c\ b^{t_u}\ \cos(\operatorname{arctg}\frac{\ln b}{\phi} + \pi)$$

und unter Verwendung trigonometrischer Umformungen

$$h(t_u) = 1+c\ b^{t_u}\ \cos(\operatorname{arctg}\ \frac{\ln b}{\phi})$$

$$h(t_u) = 1+c\ b^{t_u}\ \cos(-\arccos\ \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\ln b}{\phi})^2}})$$

$$= 1+c\ b^{t_u}\ \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\ln b}{\phi})^2}}\ . \qquad (2.1.13)$$

Bezeichnen wir mit e_u den Betrag des maximalen Werts der Übergangsfunktion zum Zeitpunkt t_u (siehe Bild 2.1.5), so ergibt sich für e_u in Prozent

$$\frac{e_u}{100\ \%} = -h(t_u) = -1-c\ b^{t_u}\ \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\ln b}{\phi})^2}}$$

$$= -1-c\ b^{(\operatorname{arctg}\ \frac{\ln b}{\phi} -\alpha+\pi)\ \frac{1}{\phi}}\ \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\ln b}{\phi})^2}}\ .$$

(2.1.14)

Die Übergangsfunktion h(t) erreicht zum Zeitpunkt t_{max} den Wert

$$h(t_{max}) = 1-c\ b^{t_{max}} \cos((\operatorname{arctg}\frac{\ln b}{\phi} + 2\pi-\alpha)\ \frac{\phi}{\phi} + \alpha)$$

$$= 1-c\ b^{t_{max}}\ \cos(\operatorname{arctg}\frac{\ln b}{\phi})$$

$$= 1-c\ b^{t_{max}}\ \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\ln b}{\phi})^2}}\ . \qquad (2.1.15)$$

Gemäß Bild 2.1.5 ergibt sich das maximale Überschwingen in Prozent mit Gl.(2.1.12) und Gl.(2.1.15) zu

$$\frac{e_{max}}{100\,\%} = -c\; b^{\left(\operatorname{arctg}\frac{\ln b}{\phi} - \alpha + 2\pi\right)\frac{1}{\phi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\ln b}{\phi}\right)^2}} \,. \qquad (2.1.16)$$

Aus der Forderung nach betragsmäßig gleichem Über- und Unterschwingen folgt mit den Gln.(2.1.14) und (2.1.16):

$$-1-cb^{\left(\operatorname{arctg}\frac{\ln b}{\phi} - \alpha + \pi\right)\frac{1}{\phi}} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\ln b}{\phi}\right)^2}} = -c\; b^{\left(\operatorname{arctg}\frac{\ln b}{\phi} - \alpha + 2\pi\right)\frac{1}{\phi}} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\ln b}{\phi}\right)^2}}$$

bzw.

$$-1 + \frac{e_{max}}{100\,\%}\, b^{-\pi/\phi} = \frac{e_{max}}{100\,\%} \qquad (2.1.17)$$

und damit als explizite Lösung für $\frac{\ln b}{\phi}$:

$$\frac{\ln b}{\phi} = -\frac{1}{\pi} \ln \frac{e_{max} + 100\,\%}{e_{max}} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{e_{max}}{e_{max} + 100\,\%} \,. \qquad (2.1.18)$$

Im Unterschied zur kontinuierlichen Systembeschreibung - es ergibt sich eine Gleichung, die nur von der Dämpfung abhängt - ergibt sich eine Gleichung als Quotient der beiden Größen $\ln b$ und ϕ. Dies hat seine Ursache in der Abbildung in die z-Ebene. 1)

---

1) Anzumerken ist an dieser Stelle, daß der angegebene Entwurf sich ohne Schwierigkeiten auch für ein festes Verhältnis von Über- und Unterschwingen erweitern läßt. Dies würde die Einführung eines zusätzlichen Verhältnisfaktors in Gl.(2.1.17) bedeuten. Am weiteren Vorgehen für den Entwurf ergibt sich keine Änderung. Da aber die Forderung nach verschieden großem Über- und Unterschwingen beliebig viele Kombinationsmöglichkeiten zuläßt und die Forderung nach gleichem Über- und Unterschwingen sehr sinnvoll erscheint, wird auf eine weitere Behandlung verzichtet.

2.1.4. Die zweite Bedingung zur Bestimmung der unbekannten Größen ϕ, α, $|p|$

Die zweite Bedingung zur Bestimmung der unbekannten Größen ϕ, α $|p|$ für gleiches Über- und Unterschwingen kann mittels Verwendung von Gl.(2.1.14), (2.1.11) und $c = 1/\cos\alpha$ gewonnen werden. Mit der Darstellung von b in Exponentialform ergibt sich

$$\frac{e_u}{100\,\%} = -1 - \frac{1}{\cos\alpha}\, e^{\left(\operatorname{arctg}\frac{\ln b}{\phi}+\pi-\alpha\right)\frac{\ln b}{\phi}} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\ln b}{\phi}\right)^2}}$$

$$= -1 - \frac{1}{\cos\alpha}\, e^{-\alpha\frac{\ln b}{\phi}}\, e^{\left(\operatorname{arctg}\frac{\ln b}{\phi}+\pi\right)\frac{\ln b}{\phi}} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\ln b}{\phi}\right)^2}} \,. \qquad (2.1.19)$$

Aus dieser Beziehung kann nun α bestimmt werden. Dies kann aufgrund der impliziten Form der Gleichung nur numerisch geschehen.

Wird zur Lösung das Newton-Verfahren verwendet, so ergibt sich als Funktion, deren Nullstelle gesucht werden muß,

$$f(\alpha) = \frac{e_u + 100\,\%}{100\,\%} + \frac{1}{\cos\alpha}\, e^{-\alpha\frac{\ln b}{\phi}}\, e^{\left(\operatorname{arctg}\frac{\ln b}{\phi}+\pi\right)\frac{\ln b}{\phi}} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\ln b}{\phi}\right)^2}} \stackrel{!}{=} 0 \qquad (2.1.20)$$

und als zugehörige Ableitung

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\, e^{-\alpha\frac{\ln b}{\phi}}\, e^{\left(\operatorname{arctg}\frac{\ln b}{\phi}+\pi\right)\frac{\ln b}{\phi}} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\ln b}{\phi}\right)^2}}$$

$$- \frac{1}{\cos\alpha} e^{-\alpha\frac{\ln b}{\phi}} \frac{\ln b}{\phi}\, e^{\left(\operatorname{arctg}\frac{\ln b}{\phi}+\pi\right)\frac{\ln b}{\phi}} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\ln b}{\phi}\right)^2}}$$

$$= e^{-\alpha \frac{\ln b}{\phi}} e^{(\operatorname{arctg} \frac{\ln b}{\phi} + \pi) \frac{\ln b}{\phi}} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\ln b}{\phi})^2}} (\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\ln b}{\phi \cos \alpha}) \; .$$

(2.1.21)

2.1.5. Die dritte Bedingung zur Bestimmung der unbekannten Größen ϕ, α, $|p|$

Die Übergangsfunktion gemäß Gl.(2.1.8) ist vollständig bestimmt, wenn die 3 Größen α, ϕ und $b = |p|$ bekannt sind.

Als dritte Gleichung zur Bestimmung des unbekannten Winkels ϕ kann eine geometrische Beziehung für den Winkel α verwendet werden (Lindorff (1965)). Für $\cos\alpha$ ergibt sich aus der Bedingung, daß die Fläche des Dreiecks BDC (gemäß Bild 2.1.6) einerseits durch $\frac{1}{2}\,\overline{DC}\;\overline{EB}$ und andererseits durch $\frac{1}{2}\,\overline{BC}\;\overline{FD}$ bzw. $\frac{1}{2}\,\overline{BC}\;\overline{DB}\cos(\pi-\alpha)$ beschrieben werden kann.

Mit

$$\overline{DC} = (\beta-1); \quad \overline{EB} = |\mathrm{Im}\; p|; \quad |\overline{BC}| = |1-\bar{p}|; \quad \overline{DB} = |p-\beta|; \quad |p| = b$$

ergibt sich für den Winkel α

$$\cos(\pi-\alpha) = \frac{(\beta-1)\,|\mathrm{Im}\; p|}{|1-\bar{p}|\,|p-\beta|} \quad \text{bzw.} \quad \cos\alpha = \frac{(1-\beta)\,|\mathrm{Im}\; p|}{|1-\bar{p}|\,|p-\beta|} \qquad (2.1.22)$$

Aus Gl.(2.1.22) kann nun, wie im folgenden gezeigt wird, eine implizite Gleichung für den Winkel ϕ (siehe Bild 2.1.6) gewonnen werden.

Mit der Abkürzung

$$a = \frac{\ln b}{\phi}$$

oder

$$b = e^{a\phi} \qquad (2.1.23)$$

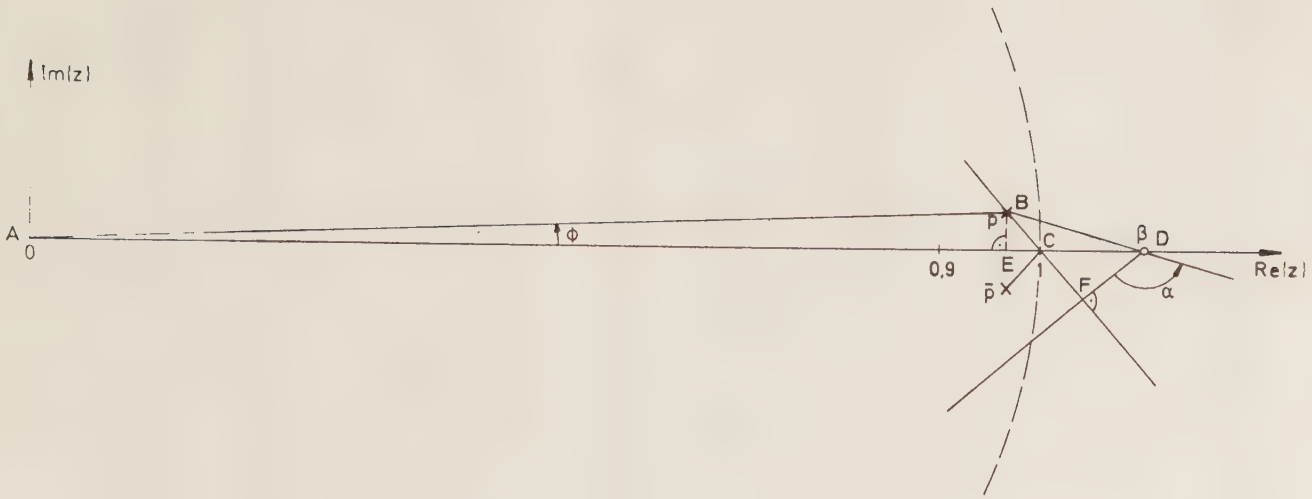

Bild 2.1.6. Lage der Pole p, $\bar{p}$ und der Nullstelle β ($e_{max} = e_u = 10$ %; $\beta = 1,10$)

ergibt sich für die verschiedenen Terme von Gl.(2.1.22)

$$|1-\bar{p}| = |1-b\cos\phi + jb\sin\phi| = \sqrt{1+e^{2a\phi}-2e^{a\phi}\cos\phi}\,, \qquad (2.1.24)$$

$$|p-\beta| = |b\cos\phi + jb\sin\phi-\beta| = \sqrt{e^{2a\phi}-2\beta e^{a\phi}\cos\phi+\beta^2} \qquad (2.1.25)$$

und

$$|\mathrm{Im}\,p| = b\cdot\sin\phi = e^{a\phi}\sin\phi, \quad \phi<\pi\,, \qquad (2.1.26)$$

und damit für Gl.(2.1.22)

$$\cos\alpha = \frac{(1-\beta)e^{a\phi}\sin\phi}{\sqrt{(e^{2a\phi}-2\beta e^{a\phi}\cos\phi+\beta^2)(1+e^{2a\phi}-2e^{a\phi}\cos\phi)}}\,. \qquad (2.1.27)$$

Die Gl.(2.1.27) stellt nun die gewünschte Bestimmungsgleichung für ϕ dar. Im Gegensatz zu den beiden Bestimmungsgleichungen für $\ln b/\phi$ und α hängt Gl.(2.1.27) von der Lage der Nullstelle β ab.

Zur numerischen Lösung mittels Newton-Verfahren von Gl.(2.1.27) kann eine Funktion $g(\phi,\beta)$, deren Nullstelle bestimmt werden muß, definiert werden.

Für $g(\phi,\beta)$ ergibt sich

$$g(\phi,\beta) = \cos\alpha\sqrt{e^{2a\phi}(1+4\beta\cos^2\phi+\beta^2) - 2\cos\phi(\beta e^{a\phi}+e^{3a\phi}+\beta^2e^{a\phi}+\beta^2e^{2a\phi}+\beta e^{3a\phi})+e^{4a\phi}+\beta^2} - (1-\beta)e^{a\phi}\sin\phi \stackrel{!}{=} 0 \qquad (2.1.28)$$

und für die Ableitung nach ϕ

$$\frac{dg}{d\phi} = \frac{1}{2}\cos\alpha\,\frac{(2ae^{2a\phi}(1+4\beta\cos^2\phi+\beta^2) - e^{2a\phi}\,4\beta\sin2\phi + 2\sin\phi(\beta e^{a\phi}+e^{3a\phi}}{\sqrt{e^{2a\phi}(1+4\beta\cos^2\phi+\beta^2) - 2\cos\phi(\beta e^{a\phi}+e^{3a\phi}+\beta^2e^{a\phi}+\beta e^{3a\phi}) + e^{4a\phi}+\beta^2}}$$

$$\frac{+\beta^2e^{a\phi}+\beta e^{3a\phi}) - 2\cos\phi(\beta ae^{a\phi}+3ae^{3a\phi}+\beta^2ae^{a\phi}+3a\beta e^{3a\phi})+4ae^{4a\phi}}{}$$

$$- (1-\beta)ae^{a\phi}\sin\phi - (1-\beta)e^{a\phi}\cos\phi$$

$$= \frac{\cos\alpha\left[ae^{2a\phi}(1+4\beta\cos^2\phi+\beta^2) - e^{2a\phi}2\beta\sin2\phi + \sin\phi(\beta e^{a\phi}+e^{3a\phi}+\beta^2 e^{a\phi}\right.}{\sqrt{e^{2a\phi}(1+4\beta\cos^2\phi+\beta^2) - 2\cos\phi(\beta e^{a\phi}+e^{3a\phi}+\beta^2 e^{a\phi}+\beta e^{3a\phi}) + e^{4a\phi}+\beta^2}}$$

$$\left.+\beta e^{3a\phi}) - a\cos\phi(\beta e^{a\phi}+3e^{a\phi}+\beta^2 e^{a\phi}+3\beta e^{3a\phi}) + 2ae^{4a\phi}\right]$$

$$- (1-\beta)ae^{a\phi}\sin\phi - (1-\beta)e^{a\phi}\cos\phi. \qquad (2.1.29)$$

2.1.6. Numerische Lösbarkeit der Gleichung für ϕ

Die in Abschnitt 2.1.5 angegebene Gleichung zur Bestimmung von ϕ und Abhängigkeit der Nullstelle ß ist zur Lösung mittels des Newtonschen Iterationsverfahrens sehr schlecht geeignet. Die Funktionswerte selbst besitzen einen sehr kleinen Betrag (s. Bild 2.1.7). Außerdem besitzt die Funktion gemäß Gl.(2.1.28) aufgrund der periodischen Kreisfunktion nicht nur eine Nullstelle. Damit ist die Wahl des Anfangswerts extrem kritisch. Selbst bei geschickter Wahl des Anfangswerts sind aufgrund des kleinen Funktionswerts mehrere hundert Iterationen zur Erreichung des richtigen Werts notwendig.

Eine Lösung dieser Gleichung im Rahmen einer ST-Regelstrategie ist aufgrund der langsamen Konvergenz nicht denkbar.

2.1.7. Lösungsverfahren zur Bestimmung des Winkels ϕ

Bei der seitherigen Betrachtungsweise der Übertragungsfunktion und Übergangsfunktion wurde zur Bestimmung sämtlicher Größen nur auf die diskrete Darstellung Bezug genommen. Zur Bestimmung des Winkels ϕ soll angenommen werden, daß die diskrete Übertragungsfunktion gemäß Gl.(2.1.5) aus folgender kontinuierlicher Übertragungsfunktion mit 2 konjugiert komplexen Polen und einer Nullstelle (PT_2S-Glied mit einer Nullstelle)

$$G_W(s) = \frac{\frac{s}{f} + 1}{\frac{s^2}{\omega_o^2} + \frac{2d}{\omega_o} + 1} \qquad (2.1.30)$$

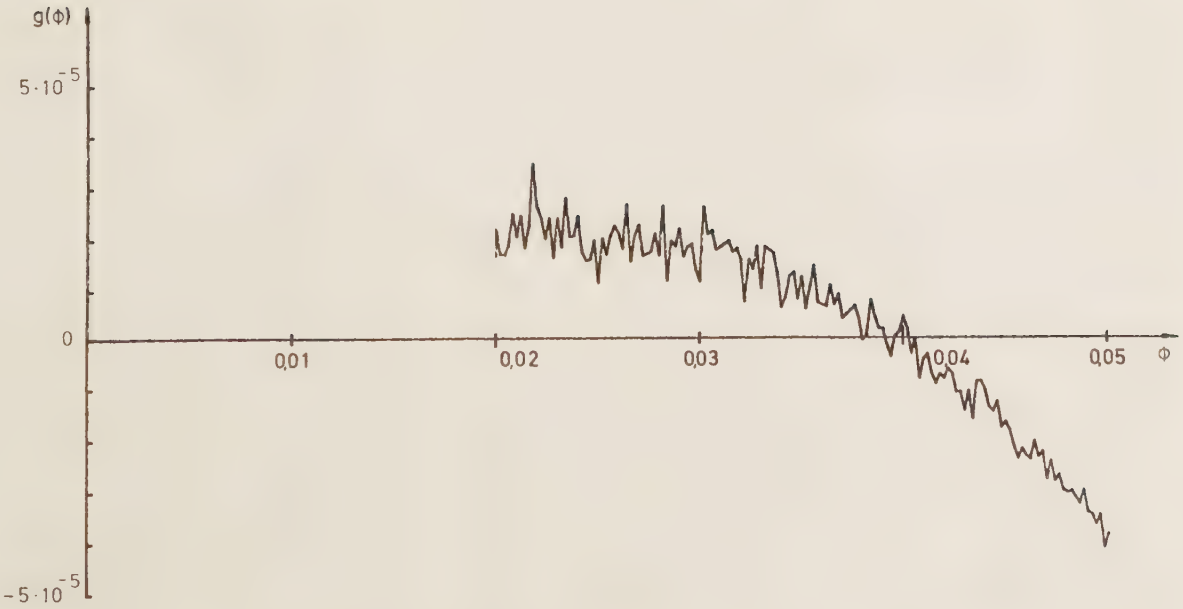

Bild 2.1.7. Numerisch berechneter Verlauf der Funktion $g(\phi,\beta)$ gemäß Gl.(2.1.28) in Abhängigkeit von ϕ für eine Nullstelle β bei $z = 1,1$ (von $g(\phi) = 0$ für $\phi = 0,0410882$)

Bemerkung: Der sprunghafte Verlauf beruht auf zu geringer Rechengenauigkeit, da die jeweiligen Größen in Gl.(2.1.28) sich um Potenzen unterscheiden.

mittels z-Transformation unter Berücksichtigung eines Halteglieds nullter Ordnung hervorgeht. Für die Abtastzeit T bilden sich die kontinuierlichen Pole bei

$$s_{1/2} = -\omega_o d \pm j\omega_o\sqrt{1-d^2} \qquad (2.1.31)$$

im z-Bereich nach

$$z_{1/2} = e^{-\omega_o dT}\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\ T \pm je^{-\omega_o dT}\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\ T \qquad (2.1.32)$$

ab.

Als Zählernullstelle ergibt sich für die kontinuierliche Nullstelle bei s = -f

$$z_{NS} = 1 + \frac{e^{-2\omega_o dT} - 2e^{-\omega_o dT}\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\ T+1}{e^{-\omega_o dT}\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\ T + \frac{e^{-\omega_o dT}}{\sqrt{1-d^2}}\ \frac{df-\omega_o}{f}\ \sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\ T-1} \cdot$$

(2.1.33)

Sind Dämpfung, Betrag der konjugiert komplexen Pole und kontinuierliche Nullstelle bekannt, so läßt sich für eine bestimmte Abtastzeit die Lage der diskreten Nullstelle explizit berechnen.

Oder anders ausgedrückt: Ist der Zusammenhang zwischen ω_o und d und f im Kontinuierlichen für die Bedingung gleichen Über- und Unterschwingens bekannt, so können wir durch Wahl des Parameters T jede beliebige Lage der Nullstelle rechts des Einheitskreises erzwingen. Die Abtastzeit, im folgenden als Parameter benutzt, wird im Gegensatz zu der festen Abtastzeit T des diskreten Reglers als "virtuelle Abtastzeit T'" bezeichnet. Für eine kontinuierliche Übertragungsfunktion eines PT_2S-Gliedes mit einer Nullstelle kann der Zusammenhang zwischen d und ω_o für gleiches Über- und Unterschwingen angegeben werden (siehe Anhang A 3). Dabei genügt es, diesen Zusammenhang nur für den Fall f = -1 zu betrachten. Eine graphische Darstellung der beiden Größen findet sich in Bild 2.1.8 und die entsprechenden Zahlenwerte in Tabelle 2.1.1.

$e_{max} = e_u/\%$	d	ω_o	T'_{pol}
1,0	0,826651	0,152623	1,84398
2,0	0,781244	0,222138	1,78888
3,0	0,747580	0,277432	1,74952
4,0	0,719860	0,325247	1,71800
5,0	0,695925	0,368205	1,69133
6,0	0,674688	0,407654	1,66802
7,0	0,655508	0,444408	1,64718
8,0	0,637968	0,478999	1,62824
9,0	0,621780	0,511802	1,61083
10,0	0,606732	0,543088	1,59466
11,0	0,592663	0,573077	1,57953
12,0	0,579450	0,601917	1,56529
13,0	0,566990	0,629751	1,55181
14,0	0,555203	0,656687	1,53898
15,0	0,544021	0,682811	1,52674
16,0	0,533384	0,708202	1,51501
17,0	0,523246	0,732922	1,50375
18,0	0,513563	0,757027	1,49290
19,0	0,504299	0,780566	1,48243
20,0	0,495423	0,803586	1,47230
21,0	0,486904	0,826118	1,46248
22,0	0,478719	0,848199	1,45295
23,0	0,470845	0,869858	1,44369
24,0	0,463261	0,891121	1,43467
25,0	0,455950	0,912014	1,42588
26,0	0,448894	0,932556	1,41731
27,0	0,442079	0,952770	1,40893
28,0	0,435491	0,972675	1,40074
29,0	0,429118	0,992285	1,39273
30,0	0,422947	1,011610	1,38489
31,0	0,416969	1,030680	1,37720
32,0	0,411173	1,049490	1,36967
33,0	0,405550	1,068070	1,36227
34,0	0,400092	1,086420	1,35501
35,0	0,394791	1,104550	1,34787
36,0	0,389640	1,122470	1,34086
37,0	0,384632	1,140190	1,33397
38,0	0,379760	1,157720	1,32719
39,0	0,375019	1,175070	1,32051
40,0	0,370403	1,192250	1,31394
41,0	0,365907	1,209260	1,30747
42,0	0,361525	1,226100	1,30109
43,0	0,357254	1,242800	1,29480
44,0	0,353088	1,259340	1,28861
45,0	0,349024	1,275730	1,28250
46,0	0,345057	1,292000	1,27647
47,0	0,341185	1,308120	1,27052
48,0	0,337403	1,324120	1,26465
49,0	0,333708	1,339990	1,25885
50,0	0,330097	1,355750	1,25313

Tabelle 2.1.1. Werte für Dämpfung d und Eigenfrequenz ω_o und T'_{pol} bei vorgegebenem Über- und Unterschwingen für eine Nullstelle bei f = -1

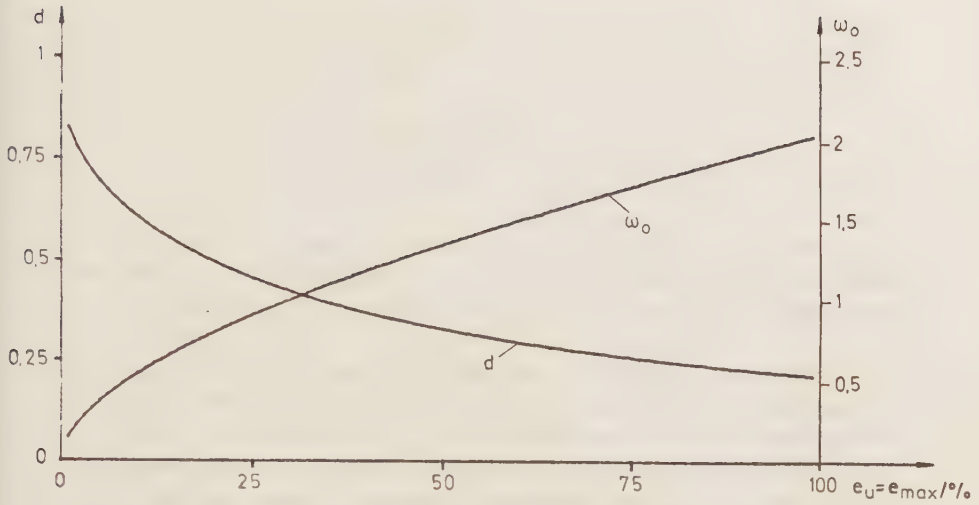

Bild 2.1.8. Dämpfung d und Eigenfrequenz ω_o des kontinuierlichen PT_2S-Glieds mit einer Nullstelle bei f = -1 für gleiches Über- und Unterschwingen

Aus der Forderung, daß die Nullstelle z_{NS} als Funktion der virtuellen Abtastzeit T' genau gleich der nicht kürzbaren Nullstelle β der Regelstrecke und damit auch der Modellübertragungsfunktion sein muß, ergibt sich mit Gl.(2.1.33) für f = -1 als implizite Gleichung in T', deren Nullstelle berechnet werden muß,

$$\ell(T') = e^{-\omega_o dT'}\left[-(\beta+1)\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T' - \frac{d+\omega_o}{\sqrt{1-d^2}}(\beta-1)\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T'\right.$$

$$\left.+e^{-\omega_o dT'}\right]+\beta \stackrel{!}{=} 0\,. \qquad (2.1.34)$$

Die zur Lösung mittels Newton-Verfahren benötigte Ableitung lautet:

$$\frac{d\ell}{dT'} = -\omega_o d\ [\ell-\beta] + e^{-\omega_o dT'}\left[\omega_o\sqrt{1-d^2}\left[(\beta+1)\ \sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T'\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{d+\omega_o}{\sqrt{1-d^2}}\ (\beta-1)\ \cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T'\right] - \omega_o d\, e^{-\omega_o dT'}\right]. \qquad (2.1.35)$$

Diese Gleichung kann sehr viel leichter als die aus der geometrischen Beziehung gewonnene Gl.(2.1.18) gelöst werden, da sowohl der Funktionswert als auch die Ableitung größere Werte annehmen.

Für die Wahl des Startwerts empfiehlt es sich, die Gl.(2.1.33) etwas genauer zu betrachten. Der Verlauf der Ortskurve der Zählernullstelle, wie er beispielhaft in Bild 2.1.9 dargestellt ist, zeigt, daß die Nullstelle für große Abtastzeiten von der rechten z-Halbebene in die linke Halbebene "springt". Dieses Springen tritt genau dann auf, wenn die Funktion der diskreten Nullstelle Gl.(2.1.33) einen Pol besitzt. Die entsprechende virtuelle Abtastzeit soll mit T'_{pol} bezeichnet werden. Als Anfangswert für das Newtonsche Iterationsverfahren läßt sich ein Wert der virtuellen Abtastzeit wählen, der kleiner als T'_{pol} ist (z. B. 80 % von T'_{pol}). (Eine tabellarische Darstellung von T'_{pol} findet sich in Tabelle 2.1.1.)

Aus Gl.(2.1.33) bestimmt sich die kritische Abtastzeit T'_{pol} für $f = -1$

$$N_{NS}(T'_{pol}) = e^{-\omega_o dT'_{pol}}\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\ T'_{pol}$$

$$- \frac{e^{-\omega_o dT'_{pol}}}{\sqrt{1-d^2}}(d+\omega_o)\ \sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\ T'_{pol} - 1 \stackrel{!}{=} 0\,. \qquad (2.1.36)$$

Diese implizite Gleichung kann ebenfalls nur numerisch unter Zuhilfenahme des Newtonschen Iterationsverfahrens gelöst werden. Die entsprechende Ableitung ergibt sich zu

$$\frac{dN_{NS}}{dT'_{pol}} = e^{-\omega_o d T'_{pol}} \left[-\omega_o d \left(\cos\omega_o \sqrt{1-d^2}\, T'_{pol} + \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} (d+\omega_o) \sin\omega_o \sqrt{1-d^2}\, T'_{pol} \right) \right.$$

$$\left. + \omega_o \sqrt{1-d^2} \left(-\sin\omega_o \sqrt{1-d^2}\, T'_{pol} + \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} (d+\omega_o) \cos\omega_o \sqrt{1-d^2}\, T'_{pol} \right) \right] . \qquad (2.1.37)$$

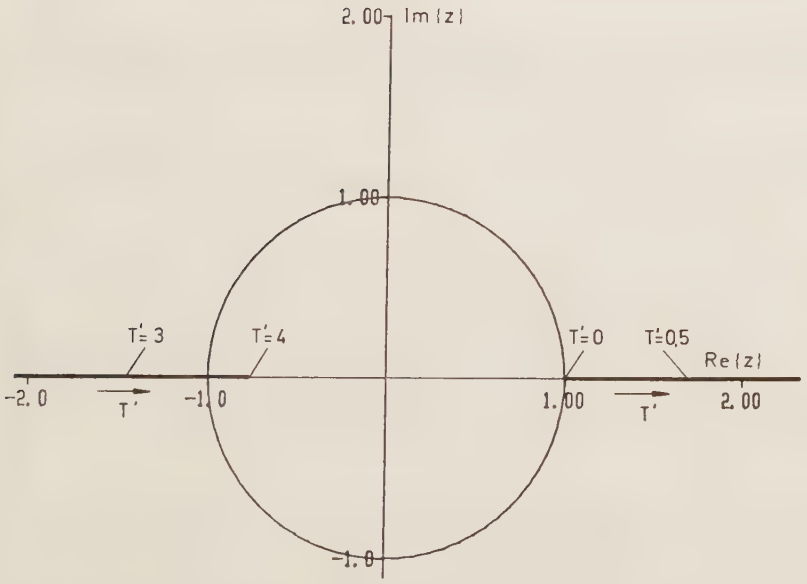

Bild 2.1.9. Wurzelortskurve der Nullstelle für ein PT_2S-Glied mit 10 % Über- und Unterschwingen in Abhängigkeit von der Abtastzeit T'. $0 < T' < 4$ (die Nullstelle besitzt eine Sprungstelle bei $T'_{pol} = 1{,}595$).

Für die Berechnung des Winkels ϕ läßt sich zusammenfassend folgendes Verfahren angeben:

1) Berechnung oder Vorgabe der Dämpfung d und der Eckfrequenz ω_o eines kontinuierlichen PT_2S-Glieds mit gleichem Über- und Unterschwingen und einer Nullstelle bei f = -1.

2) Berechnung der Zeit T'_{pol}, für die die Nullstelle von der rechten Halbebene in die linke Halbebene springt.

3) Vorgabe eines geeigneten Anfangswerts T', z. B. $T'_{pol} \cdot 0{,}8$, für die implizite Lösung von Gl.(2.1.34).

4) Iterative Berechnung des Werts T'.

5) Berechnung des Wertes

$$\phi = \omega_o \sqrt{1-d^2}\, T' \,. \qquad (2.1.38)$$

Damit kann die gewünschte Modellübertragungsfunktion im z-Bereich berechnet werden, die als Grundlage des Reglerentwurfs dient.

2.1.8. Abhängigkeit der übrigen Zeitkenngrößen der Übergangsfunktion vom Wert des maximalen Über- und Unterschwingens

Wie schon im Abschnitt 2.1.1. betont wurde, liegen nach Vorgabe von gleichem Über- und Unterschwingen der Übergangsfunktion die übrigen Kenngrößen der Übergangsfunktion fest. Wird bei fester Nullstelle eine Anstiegszeitverkürzung angestrebt, so muß größeres Über- und Unterschwingen in Kauf genommen werden. Diese Grundsätze gelten auch dann, wenn eine Modellübertragungsfunktion mit unterschiedlichem Über- und Unterschwingen angestrebt würde.

Zur Veranschaulichung soll im folgenden graphisch in den Bildern 2.1.10 - 2.1.13 dargestellt werden, wie die Zeitkenngrößen vom Wert des Über- und Unterschwingens abhängen. Dabei erfolgt die Darstellung zum einen als Funktion des Über- und Unterschwingens mit der Lage der Nullstelle als Parameter und zum anderen als Funktion der Nullstellenlage und dem Betrag des Unter- und Überschwingens als Parameter. Eine ausführliche Darstellung dieser Kurven findet sich bei Nöth (1981). Die Definition der Zeitkenngrößen ist aus Bild 2.1.5 zu entnehmen.

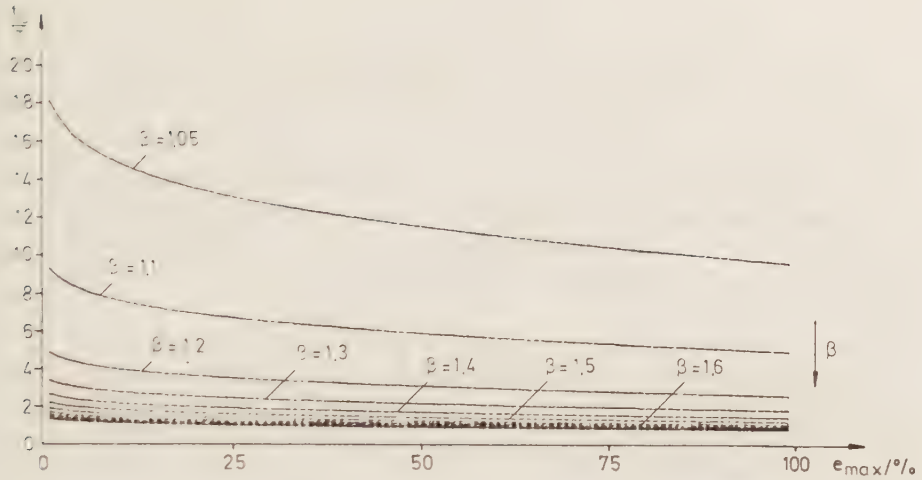

Bild 2.1.10a. Unterschwingzeit t_u gemäß Gl.(2.1.11) in Abhängigkeit von Über- und Unterschwingen für β = 1,05; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0.

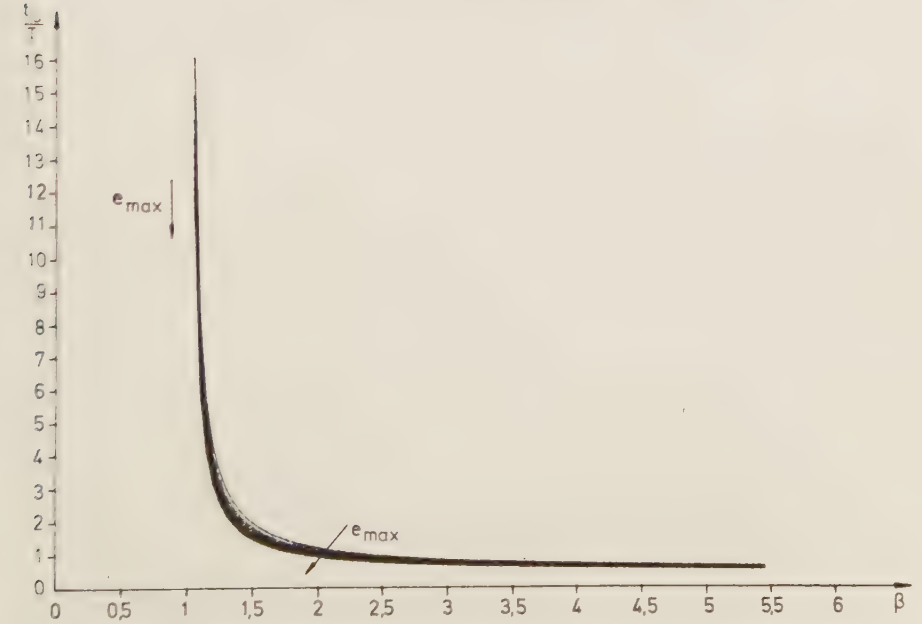

Bild 2.1.10b. Unterschwingzeit t_u gemäß Gl.(2.1.11) in Abhängigkeit von der Nullstelle β für $e_{max} = e_u = 5$, 10, 15, 20, 30 40, 45, 50 %.

Die Zeit bis zum Erreichen des maximalen Unterschwingens wurde gemäß Gl.(2.1.11) bestimmt.

Auffallend ist, daß t_u auch durch eine Vergrößerung von Über- und Unterschwingen kaum zu verkürzen ist. Dies zeigt sich besonders bei Bild 2.1.10b. Die einzelnen Kurven sind für verschiedene Werte von e_{max} und e_u praktisch unabhängig von e_{max}.

t_{50} kann, wie aus Bild 2.1.11a zu ersehen ist, für sehr kleine Werte von e_{max} und e_u durch Vergrößerung von e_{max} sehr stark vermindert werden. Die größte Abnahme hängt dabei allerdings (siehe Bild 2.1.11b) stark von der Lage der Nullstelle bezüglich des Einheitskreises ab.

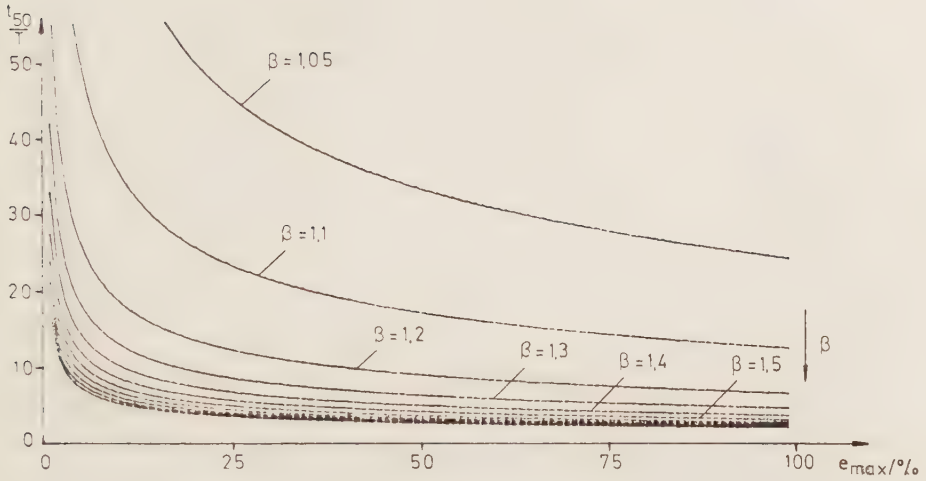

Bild 2.1.11a. t_{50} in Abhängigkeit von Über- und Unterschwingen für β = 1,05; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0 .

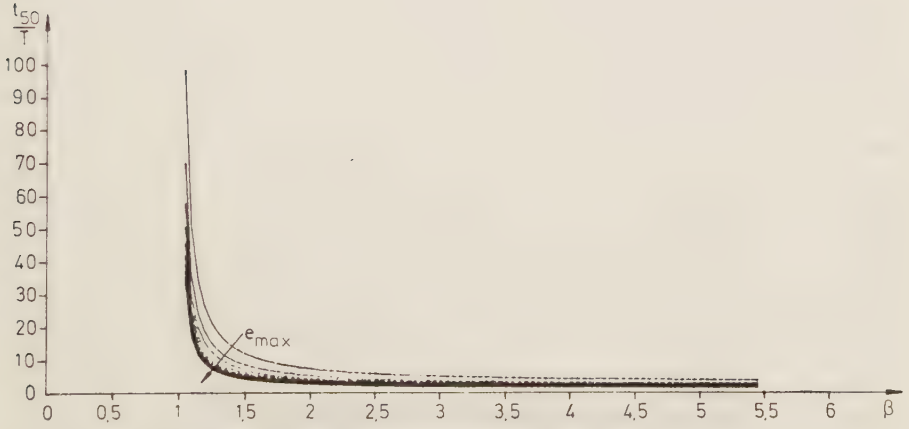

Bild 2.1.11b. t_{50} in Abhängigkeit von der Nullstelle β für $e_{max} = e_u$ = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 % .

Das bereits für t_{50} Gesagte gilt für T_{a50} entsprechend.

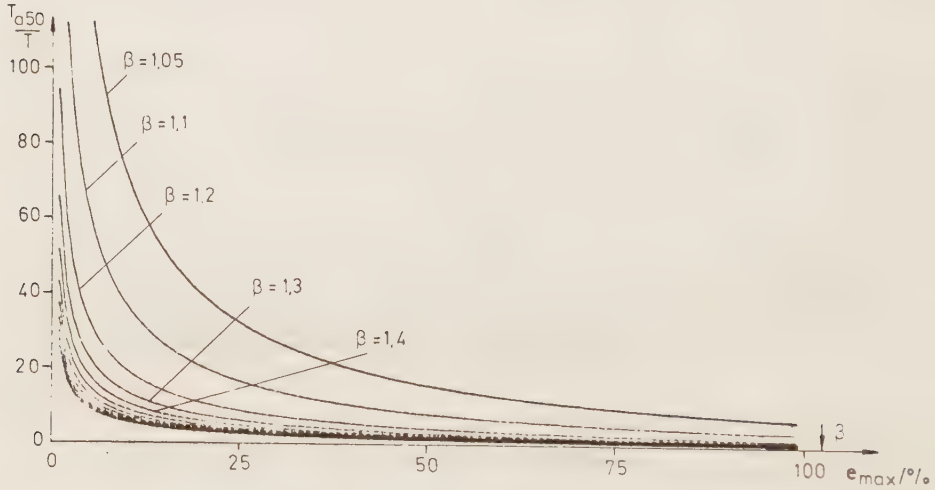

Bild 2.1.12a. Die Anstiegszeit T_{a50} in Abhängigkeit von Über- und Unterschwingen für β = 1,05; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0.

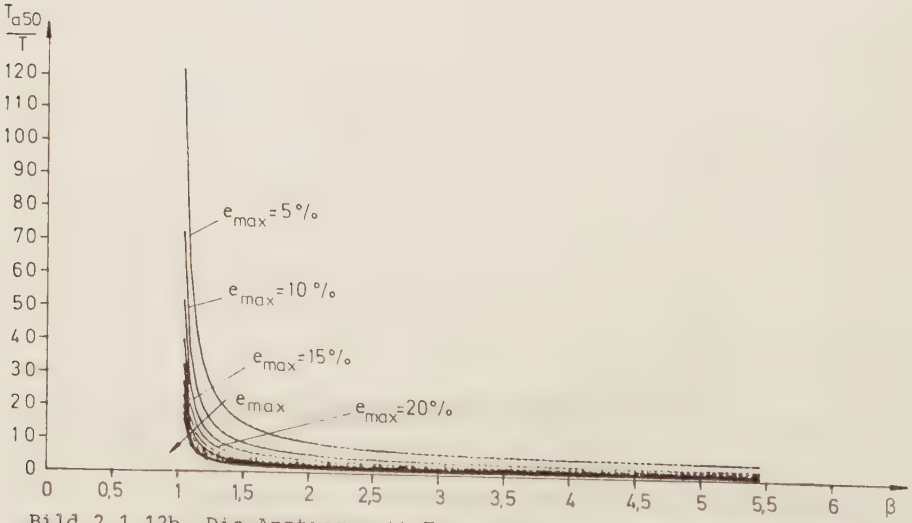

Bild 2.1.12b. Die Anstiegszeit T_{a50} in Abhängigkeit von der Nullstelle β für $e_{max} = e_u$ = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 %.

Der graphische Verlauf von Bild 2.1.13a und Bild 2.1.13b ähnelt dem Verlauf der anderen Größen.

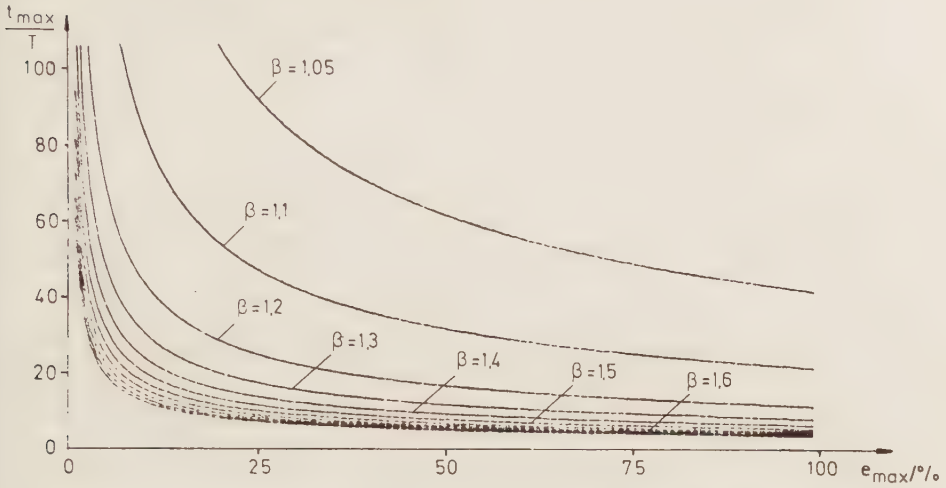

Bild 2.1.13a. t_{max} gemäß Gl.(2.1.12) in Abhängigkeit von Über- und Unterschwingen für β = 1,05; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0 .

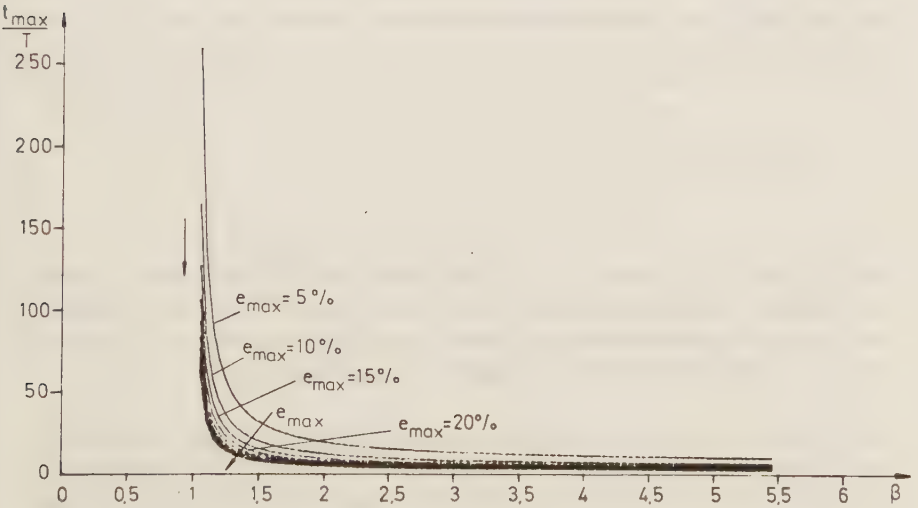

Bild 2.1.13b. t_{max} gemäß Gl.(2.1.12) in Abhängigkeit von der Nullstelle β für $e_{max} = e_u$ = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 %.

Zur Veranschaulichung soll die Lage der Pole bei verschiedener Lage der Nullstelle für 10 % und 30 % Über- und Unterschwingen dargestellt werden (siehe Bild 2.1.14a, b).

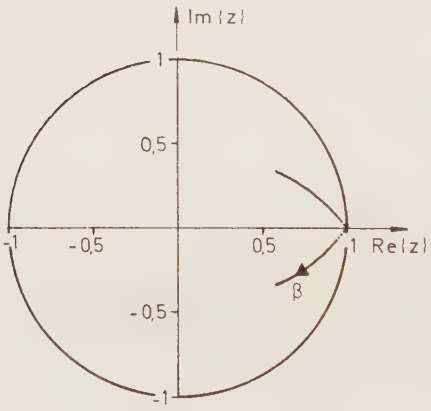

Bild 2.1.14a.

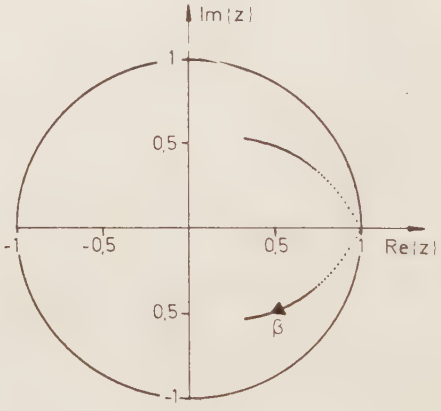

Bild 2.1.14b.

Der Wurzelort des konjugiert komplexen Polpaares für $1{,}05 \leq \beta \leq 5{,}5$ (Schrittweite = 0,05) für Unter- und Überschwingen von 10 % (2.1.14a) bzw. 30 % (2.1.14b).

2.2. Die Regelkreisstruktur

Die im Abschnitt 2.1 abgeleiteten Beziehungen können zur Berechnung des Reglers nach Vorgabe einer geeigneten Regelkreisstruktur verwendet werden. Die folgende Darstellung und Untersuchung einer geeigneten Regelkreisstruktur wird aus Gründen der Allgemeingültigkeit für eine Regelstrecke beliebiger Ordnung durchgeführt.

Wird die in Bild 2.1.1 dargestellte Regelkreisstruktur verwendet, so resultieren beim Entwurf eines Kompensationsreglers Einschränkungen für die Regelstrecke. Besitzt die Regelstrecke die Übertragungsfunktion

$$G_S(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d} \qquad (2.2.1)$$

und lautet die Übertragungsfunktion des gewünschten Führungsverhaltens

$$G_W(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)} z^{-d}, \qquad (2.2.2)$$

so ergibt sich gemäß Gl.(2.1.2) für den Regler [1)]

$$G_R(z) = \frac{1}{G_S(z)} \frac{G_W(z)}{1 - G_W(z)} = \frac{A(z)\, Q(z)}{B(z)\,(P(z) - Q(z) z^{-d})} . \qquad (2.2.3)$$

Die Übertragungsfunktion $G_o(z)$ des offenen Regelkreises lautet

$$G_o(z) = G_R(z)\, G_S(z) = \frac{A(z)\, Q(z)\, B(z) z^{-d}}{B(z)\,(P(z) - Q(z) z^{-d})\, A(z)} . \qquad (2.2.4)$$

Eine Kompensation der Pole der Regelstrecke durch Nullstellen des Reglers ist nur dann zulässig, wenn sämtliche Pole der Regelstrecke im Einheitskreis liegen. Diese Kompensation kann durch die Verschiebung des Reglers in den Rückkopplungszweig vermieden werden. Wird die in Bild 2.2.1 dargestellte Regelkreisstruktur, die von Weber (1967), Åström et al (1978) und Wittenmark und Åström (1980) vorgeschlagen wurde, verwendet, so ergibt sich als Führungsübertragungsfunktion

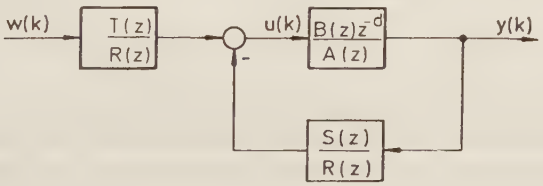

Bild 2.2.1. Regelkreisstruktur für Regelstrecke mit Totzeit

---

1) Aus Realisierbarkeitsgründen muß der Gradunterschied der gewünschten Führungsübertragungsfunktion in positiven Potenzen von z größer oder gleich dem Gradunterschied der Regelstrecke sein.

$$G_W(z) = \frac{T(z)\ B(z) z^{-d}}{A(z)\ R(z) + B(z)\ S(z) z^{-d}} \quad . \tag{2.2.5}$$

Mit Gl.(2.2.2) folgt durch Gleichsetzen und mit der Wahl

$$T(z) = Q(z)\ T_o(z) \tag{2.2.6}$$

$$P(z)\ T_o(z)\ B(z) = A(z)\ R(z) + B(z)\ S(z) z^{-d} \tag{2.2.7}$$

als Bestimmungsgleichung für den Regler. Das Polynom $T_o(z)$ kann beliebig, aber asymptotisch stabil gewählt werden und soll im folgenden wegen seiner Ähnlichkeit mit dem charakteristischen Polynom des Luenberger-Beobachters (Aström (1979a)) mit "Beobachterpolynom" bezeichnet werden. Aus Gründen der eindeutigen Lösbarkeit der Polynomgleichung Gl.(2.2.7) darf der Grad von $T_o(z)$ den Grad von $A(z)$ nicht überschreiten. Dies gilt entsprechend für die nachfolgenden Polynomgleichungen. Aus Gl.(2.2.7) ist ersichtlich, daß eine beliebige Vorgabe der Führungsübertragungsfunktion nur bei minimalphasigem Zählerpolynom der Strecke möglich ist. Da $B(z)$ Teiler der linken Seite der Gl.(2.2.7) ist, muß es auch Teiler der rechten Seite und bei Teilerfremdheit von $A(z)$ und $B(z)$ damit auch Teiler von $R(z)$ sein. Ein unbeschränktes Stellsignal wäre bei nichtminimalphasigem $B(z)$ die Folge. Dies ist auch aus der Übertragungsfunktion

$$\frac{U(z)}{W(z)} = G_W(z)\ \frac{1}{G_S(z)} = \frac{Q(z)\ A(z)}{P(z)\ B(z)} \tag{2.2.8}$$

ersichtlich.

Ein beschränktes Stellsignal bei nichtminimalphasigen Regelstrecken kann erreicht werden, falls die nichtminimalphasigen Nullstellen Bestandteil der Führungsübertragungsfunktion sind. Das Zählerpolynom der Regelstrecke

$$B(z) = B_1(z)\ B_2(z) \tag{2.2.9}$$

lasse sich in zwei Teile aufspalten. $B_1(z)$ enthält alle Nullstellen innerhalb des Einheitskreises und $B_2(z)$ alle Nullstellen außerhalb

des Einheitskreises. Für die gewünschte Führungsübertragungsfunktion wird analog zu Gl.(2.2.2) der Ansatz

$$G_W(z) = \frac{B_2(z)\ Q_1(z)}{P(z)}\ z^{-d} \tag{2.2.10}$$

oder

$$G_W(z) = \frac{T(z)\ B(z)z^{-d}}{A(z)\ R(z) + B(z)\ S(z)z^{-d}}\ . \tag{2.2.11}$$

gewählt. Wählen wir weiterhin

$$T(z) = Q_1(z)\ T_1(z), \tag{2.2.12}$$

so ergibt sich als Bestimmungsgleichung für den Regler

$$P(z)\ T_1(z)\ B_1(z) = A(z)\ R(z) + B(z)\ S(z)z^{-d} \tag{2.2.13}$$

bzw., da $B_1(z)$ Teiler von $R(z)$ sein muß und

$$R(z) = R_1(z)\ B_1(z) \tag{2.2.14}$$

sich in zwei Teile zerlegen läßt, nach Kürzung des stabilen Polynoms $B_1(z)$

$$P(z)\ T_1(z) = A(z)\ R_1(z) + B_2(z)\ S(z)z^{-d}\ . \tag{2.2.15}$$

Enthält die gewünschte Führungsübertragungsfunktion $G_W(z)$ zusätzlich zu $B_2(z)$ keine weiteren Nullstellen, dann reduziert sich $Q_1(z)$ zu einem Faktor k_q, der sich aus der Bedingung

$$G_W(1) = \frac{k_q\ B_2(1)}{P(1)} \stackrel{!}{=} 1 \tag{2.2.16}$$

zu

$$k_q = \frac{P(1)}{B_2(1)} \tag{2.2.17}$$

bestimmt.

Eine eindeutige Lösung von Gl.(2.2.15) zur Bestimmung von $R_1(z)$ und $S(z)$ ergibt sich, falls für den Grad von R_1

$$\text{Grad}\{R_1\} = d - 1 + \text{Grad}\{B_2\} \tag{2.2.18}$$

und für den Grad von S

$$\text{Grad}\{S\} = \text{Grad}\{A\} - 1 \tag{2.2.19}$$

gilt.

Diese beiden Bedingungen lassen sich leicht wie folgt nachweisen. Der Absolutkoeffizient von R(z) kann zu Eins gewählt werden. Bezeichnen wir mit n_u die Zahl der unbekannten Koeffizienten der Polynome $S(z)$ und $R_1(z)$, also

$$n_u = \text{Grad}\{S\} + \text{Grad}\{R_1\} + 1 , \tag{2.2.20}$$

dann stehen

$$n_1 = \text{Grad}\{B_2\} + \text{Grad}\{S\} + d \tag{2.2.21a}$$

oder

$$n_2 = \text{Grad}\{A\} + \text{Grad}\{R_1\} \tag{2.2.21b}$$

Gleichungen zur Verfügung. Aus der Bedingung

$$n_u = n_1$$

ergibt sich

$$\text{Grad}\{B_2\} + \text{Grad}\{S\} + d = \text{Grad}\{S\} + \text{Grad}\{R_1\} + 1$$

und damit

$$\text{Grad}\{R_1\} = d-1 + \text{Grad}\{B_2\} \tag{2.2.22}$$

und aus der Bedingung

$$n_u = n_2$$

$$\text{Grad}\{A\} + \text{Grad}\{R_1\} = \text{Grad}\{S\} + \text{Grad}\{R_1\} + 1 \qquad (2.2.23)$$

oder

$$\text{Grad}\{S\} = \text{Grad}\{A\} - 1. \qquad (2.2.24)$$

Der Koeffizientenvergleich für die Potenz z^0 fällt weg, da $P(0) = T_1(0) = 1$ gelten soll. Beide Bedingungen sind Minimalbedingungen, d. h. der Grad von S bzw. der Grad von R_1 kann auch erhöht werden. Zur Einhaltung der Lösbarkeitsbedingungen müssen dann allerdings entsprechend viele Koeffizienten vorgegeben werden. Es besteht dabei zum einen die Möglichkeit, entweder den Grad des Polynoms S(z) oder des Polynoms R(z) zu wählen.

Wird $R_1(z)$ mit $d-1+\text{Grad}\{B_2\}+\nu$ vorgegeben, d. h. mit einem um ν erhöhten Grad, dann bestimmt sich der Grad von S aus der Bedingung, daß die Zahl der Unbekannten gleich der Zahl der Gleichungen sein muß

$$\text{Grad}\{S\} = \max\{\text{Grad}\{A\} - 1+\nu;\ \ \text{Grad}\{P\} + \text{Grad}\{T_1\}-d-\text{Grad}\{B_2\}\}. \qquad (2.2.25)$$

Wird der Grad von S(z) zu $\text{Grad}\{A\}-1+\nu$ vorgegeben, ergibt sich der Grad von $R_1(z)$ zu

$$\text{Grad}\{R_1\} = \max\{d-1+\text{Grad}\{B_2\}+\nu;\ \ \text{Grad}\{P\} + \text{Grad}\{T_1\} - \text{Grad}\{A\}\}. \qquad (2.2.26)$$

Diese ν zusätzlichen Freiheitsgrade können dazu benutzt werden, bestimmte Koeffizienten oder Wurzeln der beiden zu berechnenden Polynome $R_1(z)$ und S(z) festzulegen. In der Regel wird es zweckmäßig sein, je nach Charakter der möglichen Stör- und Führungssignale eine oder zwei Wurzeln des Polynoms $R_1(z)$ bei $z = 1$ zu erzwingen. Damit kann gewährleistet werden, daß die bleibende Regelabweichung bei deterministischen Störungen gegen Null geht. Eine andere Mög-

lichkeit besteht darin, durch Vorgabe des Grades von $R_1(z)$ oder $S(z)$ den Regler mehr differenzierend oder mehr verzögernd auszulegen.

2.2.1. Die Wahl des Beobachterpolynoms und der Einfluß auf die Störübertragungsfunktion

Für die Wahl des Polynoms $T_1(z)$, das - wie zuvor dargestellt wurde - nicht in die Führungsübertragungsfunktion eingeht, gibt es im wesentlichen zwei Vorschläge. Wittenmark und Åström (1980) schlagen vor, dieses "Beobachterpolynom" als Konstante zu wählen. Dieser Vorschlag hat zwar einerseits den Vorzug der Einfachheit, andererseits aber den Nachteil einer schlechten Störübertragungsfunktion. Zudem führt diese Wahl, wie in einer ausführlichen Untersuchung (Stürz (1980)) gezeigt wurde, zu sehr großen Reglerkoeffizienten und damit zu einem großen Stellsignal. Im Hinblick auf die Ausregelung von deterministischen Störungen am Streckeneingang empfiehlt es sich, die Wurzeln des Polynoms $T_1(z)$ in die Nähe der Pole der Regelstrecke zu legen. Egardt (1979) schlägt vor, das Polynom $T_1(z)$ bei einer zusätzlichen stochastischen Störung gleich dem Zählerpolynom des Modells der stochastischen Störung zu wählen. Im folgenden sollen die verschiedenen Möglichkeiten der Wahl von $T_1(z)$ kurz dargestellt und erläutert werden.

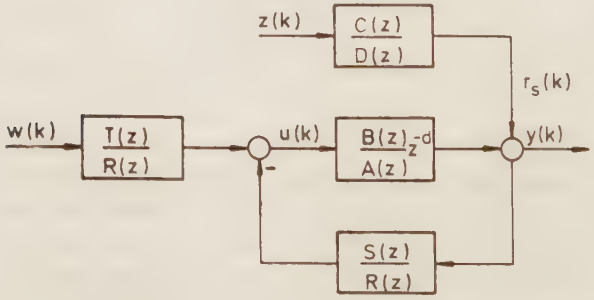

Bild 2.2.2. Erweiterte Struktur mit zusätzlichem Störmodell

Gemäß Bild 2.2.2 folgt als Störübertragungsfunktion

$$G_Z(z) = \frac{Y(z)}{Z(z)} = \frac{C(z)}{D(z)} \frac{R(z)\ A(z)}{A(z)\ R(z) + B(z)\ S(z) z^{-d}} \tag{2.2.27}$$

und mit Berücksichtigung von Gl.(2.2.9) und (2.2.14)

$$G_Z(z) = \frac{C(z)}{D(z)} \frac{R_1(z)\ A(z)}{A(z)\ R_1(z) + B_2(z)\ S(z) z^{-d}} \tag{2.2.28}$$

und Gl.(2.2.15)

$$G_Z(z) = \frac{C(z)}{D(z)} \frac{R_1(z)\ A(z)}{P(z)\ T_1(z)} \ . \tag{2.2.29}$$

Fall a:

Wird das "Beobachterpolynom" $T_1(z)$ gleich dem Nennerpolynom $A(z)$ der Regelstrecke gewählt - diese Wahl ist nur bei stabilen Regelstrecken möglich - gilt gemäß Gl.(2.2.29) für die Störübertragungsfunktion

$$G_Z(z) = \frac{C(z)}{D(z)} \frac{R_1(z)}{P(z)} \ . \tag{2.2.30}$$

Die entsprechende Polynomgleichung zur Bestimmung von $R_1(z)$ und $S(z)$ gemäß Gl.(2.2.15) lautet

$$P(z)\ A(z) = A(z)\ R_1(z) + B_2(z)\ S(z) z^{-d} \ . \tag{2.2.31}$$

Da in dieser Beziehung $A(z)$ den Teiler der linken Seite und des ersten Terms der rechten Seite darstellt, muß $A(z)$ ebenfalls Teiler von $S(z)$ sein. Mit

$$S(z) = S_1(z)\ A(z) \tag{2.2.32}$$

ergibt sich gemäß Gl.(2.2.31)

$$P(z) = R_1(z) + B_2(z)\ S_1(z) z^{-d} \ . \tag{2.2.33}$$

Dies entspricht einer modifizierten Struktur der in Bild 2.2.3 dargestellten Form.

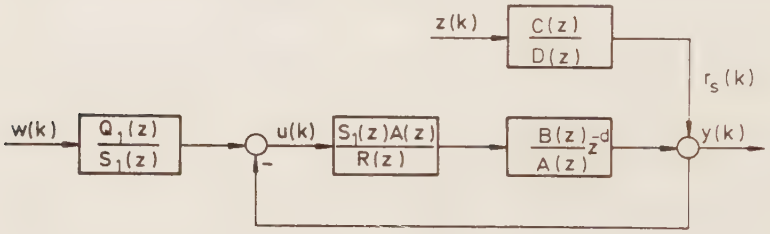

Bild 2.2.3. Modifizierte Struktur bei der Wahl von $T(z^{-1}) = A(z^{-1})$

Fall b:

Wird $T_1(z) = B_1(z)$ festgelegt, so ergibt sich als Polynomgleichung gemäß Gl.(2.2.15)

$$P(z)\ B_1(z) = A(z)\ R_1(z) + B_2(z)\ S(z)\ z^{-d} \tag{2.2.34}$$

und als Störübertragungsfunktion

$$G_Z(z) = \frac{C(z)\ A(z)\ R_1(z)}{D(z)\ P(z)\ B_1(z)} \ . \tag{2.2.35}$$

Falls eine deterministische Störung am Streckeneingang auftritt, d. h. das Störfilter der Regelstrecke entspricht

$$\frac{C(z)}{D(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \ , \tag{2.2.36}$$

folgt für die Störübertragungsfunktion

$$G_Z(z) = \frac{B(z)\ A(z)\ R_1(z)}{A(z)\ P(z)\ B_1(z)} = \frac{B_2(z)\ R_1(z)}{P(z)} \tag{2.2.37}$$

und mit Gl.(2.2.10)

$$G_Z(z) = \frac{R_1(z)}{Q_1(z)}\ G_W(z) \ . \tag{2.2.38}$$

Fall c:

Wird $T_1(z) = C(z)$ gewählt - dies ist nur bei minimalphasigem $C(z)$ möglich - so folgt aus Gl.(2.2.15)

$$P(z)\ C(z) = A(z)\ R_1(z) + B_2(z)\ S(z)\ z^{-d} \tag{2.2.39}$$

und als Störübertragungsfunktion

$$G_Z(z) = \frac{A(z)\ R_1(z)}{D(z)\ P(z)} \ . \tag{2.2.40}$$

Für den Fall, daß sich eine stochastische Störung durch ein Modell der Form

$$G_{SZ}(z) = \frac{C(z)}{A(z)} \tag{2.2.41}$$

beschreiben läßt, wird die Störübertragungsfunktion durch

$$G_Z(z) = \frac{R_1(z)}{P(z)} \tag{2.2.42}$$

beschrieben.

Wie die vorigen Überlegungen zeigen, ist es zweckmäßig, das Beobachterpolynom in den Entwurf mit einzubeziehen. Da durch die Vorgabe von $T_1(z)$ zusätzliche Pole für die Störübertragungsfunktion eingeführt werden, können z. B. kritische Störfrequenzen abgesenkt werden.

2.3. Adaptive Realisierung des Entwurfskonzepts als Self-Tuning-Strategie

2.3.1. Adaptive Realisierung der Berechnung der Reglerparameter und der Modellübertragungsfunktion

Für die adaptive Realisierung des einfachen ST-Reglers wird der Entwurf entsprechend den Abschnitten 2.1 und 2.2 mit einem Parame-

terschätzverfahren kombiniert. Das Parameterschätzverfahren zur Identifizierung der Parameter der Regelstrecke liefert die Basis für die Berechnung des Reglers aufgrund vorgegebener Werte der Zeitkenngrößen der Übergangsfunktion. Für einen zweckmäßigen Einbau in ein DDC-Konzept müssen dabei einerseits die eingangs dieses Kapitels aufgeführten Forderungen nach Vermeidung aufwendiger Lösungsverfahren und nach Vermeidung parameterempfindlicher Regelalgorithmen erfüllt werden, und andererseits muß der in den Abschnitten 2.1 und 2.2 vorgestellte Entwurf daraufhin untersucht werden, inwieweit einzelne Berechnungen zu jedem Abtastzeitpunkt notwendig sind.

Die Forderung nach Vermeidung aufwendiger Lösungsverfahren hängt für den vorgestellten Entwurf in sehr starkem Maß mit der Ordnung der Regelstrecke zusammen. Wird versucht, die Regelstrecke durch ein Modell mit einem Zählerpolynom von maximal zweiter Ordnung anzunähern, reduziert sich der Aufwand zur Berechnung des minimalphasigen und des nichtminimalphasigen Anteils des Zählerpolynoms der Regelstrecke beträchtlich, da die Wurzeln explizit berechnet werden können. Gleichzeitig vereinfacht sich das Gleichungssystem, das zur Berechnung der Reglerkoeffizienten gelöst werden muß.

Beim Entwurf der Regelung eines Prozesses wird sicherlich der Wert des Über- und Unterschwingens als konstant angenommen. Damit besteht die Möglichkeit, die Berechnung der gewünschten Führungsübertragungsfunktion und die Berechnung des Reglers in zwei Teile aufzuspalten. Im Anschluß an die Vorgabe des gewünschten Über- und Unterschwingens können die Zwischengrößen, die unabhängig von der Lage der diskreten nichtminimalphasigen Nullstelle sind, berechnet werden. Dies sind einerseits Dämpfung und Eigenfrequenz eines kontinuierlichen PT_2S-Glieds mit einer Nullstelle bei $f = -1$, andererseits die Größen $\ln b/\phi$ und α und die "virtuelle" Abtastzeit T'_{pol}, bei der die diskrete Nullstelle von der rechten z-Halbebene in die linke Halbebene springt.

Zu jedem Abtastzeitpunkt muß im ST-Algorithmus die Berechnung der "virtuellen Abtastzeit T'" erfolgen. Da T'_{pol} bekannt ist, kann

für T' ein Startwert vorgegeben werden, der z. B. 80 % von T'_{pol} beträgt. Aufgrund dieses guten Startwerts kann die Berechnung nach wenigen Iterationen beendet werden. Die Berechnung der Koeffizienten der gewünschten Führungsübertragungsfunktion kann nun bei bekannter nichtminimalphasiger Nullstelle entweder aufgrund von Winkelbeziehungen unter Zuhilfenahme des Winkels ϕ erfolgen oder aufgrund der Dämpfung und Eigenfrequenz des kontinuierlichen PT_2S-Systems.

Nach Berechnung der Führungsübertragungsfunktion und erfolgter Schätzung der Regelstrecke kann die Lösung der Polynomgleichung Gl.(2.2.15) zur Berechnung der Reglerkoeffizienten erfolgen. Zur Sicherung der Eindeutigkeit der Lösung dieser Beziehung muß vorher überprüft werden, ob die bei der Identifizierung geschätzten Polynome der Regelstrecke teilerfremd sind, da sonst die lineare Unabhängigkeit des Gleichungssystems nicht mehr gesichert ist.

Für die Wahl des "Beobachterpolynoms" bestehen grundsätzlich zwei Möglichkeiten. Es kann zum einen fest gewählt werden oder, falls eine stochastische Störung vorhanden ist und das Beobachterpolynom gleich dem Zählerpolynom des Modells der stochastischen Störung gewählt wird, auch mittels eines Parameterschätzverfahrens mit erweitertem Modellansatz bestimmt werden. Nach Lösung von Gl.(2.2.15) kann der Vorfaktor k_q des Vorwärtszweigs des Reglers aus der Bedingung gemäß Gl.(2.2.17) berechnet werden, daß die Verstärkung bezüglich des Führungssignals stets gleich Eins ist.

Zur übersichtlichen Darstellung werden die notwendigen Beziehungen für die Berechnung der Führungsübertragungsfunktion und der Reglerparameter nochmals in Tabelle 2.3.1 zusammengestellt. (Die verwendeten Gleichungsnummern beziehen sich auf die vorangegangenen Abschnitte.)

Aufgrund der Vorgabe des Über- und Unterschwingens können folgende Größen berechnet werden

Bestimmungsgleichung für $\ln b/\phi$:

$$\frac{\ln b}{\phi} = \frac{1}{\pi} \frac{e_{max}}{e_{max} + 100\ \%} \tag{2.1.18}$$

Bestimmungsgleichung für α:

$$\frac{e_u + 100\ \%}{100\ \%} + \frac{1}{\cos\alpha} e^{-\alpha \frac{\ln b}{\phi}} e^{(\operatorname{arctg} \frac{\ln b}{\phi} + \pi) \frac{\ln b}{\phi}} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\ln b}{\phi})^2}} \stackrel{!}{=} 0 . \tag{2.1.20}$$

Bestimmungsgleichung für d (kontinuierlich) siehe Anhang A.3

$$d = \frac{-\ln(\frac{e_{max}}{100+e_{max}})}{\sqrt{(\ln \frac{e_{max}}{100 + e_{max}})^2 + \pi^2}} \tag{A.3.10}$$

Bestimmungsgleichung für ω_o (kontinuierlich):

$$p(\omega_o) = 100\ \% \quad \sqrt{1+2d\omega_o + \omega_o^2}\ e^{\frac{-d}{\sqrt{1-d^2}} \arctan \frac{\sqrt{1-d^2}\ \omega_o}{1 + d\omega_o} + \pi} - e_{max} \stackrel{!}{=} 0 \tag{A.3.11}$$

Bestimmungsgleichung für die "virtuelle Abtastzeit T'_{pol}" (Abtastzeit, für die die diskrete Nullstelle von der rechten Halbebene in die linke Halbebene springt)

$$N_{NS}(T'_{pol}) = e^{-\omega_o dT'_{pol}} \cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\ T'_{pol} - \frac{e^{-\omega_o dT'_{pol}}}{\sqrt{1-d^2}} (d+\omega_o) \sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\ T'_{pol} - 1 \stackrel{!}{=} 0 \tag{2.1.36}$$

Tabelle 2.3.1. Zusammenfassung der Bestimmungsgleichungen für den Reglerentwurf

Zu jedem Abtastzeitpunkt wird berechnet:

Falls die geschätzte Übertragungsfunktion der Regelstrecke

$G_S(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d}$ teilerfremd ist:

Bestimmung der Wurzeln β (nichtminimalphasig)
und β_{MP} (minimalphasig)

Bestimmungsgleichung der virtuellen Abtastzeit T'

$$\ell(T') = e^{-\omega_o dT'}\left[-(\beta+1)\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\ T' - \frac{d+\omega_o}{\sqrt{1-d^2}}(\beta-1)\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\ T' + e^{-\omega_o dT'}\right]+\beta \stackrel{!}{=} 0 \qquad (2.1.34)$$

Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten der gewünschten Führungsübertragungsfunktion (entspricht Gl.(2.1.5) in negativen Potenzen von z)

$$G_W(z) = \frac{b_{wO} + b_{w1}z^{-1}}{1 + a_{w1}z^{-1} + a_{w2}z^{-2}}\ z^{-1}$$

$$a_{w1} = -2e^{-\omega_o dT'}\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\ T'$$

$$a_{w2} = e^{-2\omega_o dT'}$$

Aus der Forderung $G_W(1) = 1$ folgt:

$$b_{wO} = \frac{1+a_{w1}+a_{w2}}{1-\beta}$$

$$b_{w1} = \frac{-\beta(1+a_{w1}+a_{w2})}{1-\beta}$$

Tabelle 2.3.1. Fortsetzung

Polynomgleichung zur Bestimmung der Reglerkoeffizienten:

$$P(z)\ T_1(z) = A(z)\ R_1(z) + B_2(z)\ S(z)z^{-d} \qquad (2.2.15)$$

Bestimmung des Polynoms R(z):

$$R(z) = R_1(z)\ B_1(z) \qquad (2.2.14)$$

mit

$$B_1(z) = b_o(1-\beta_{MP}z^{-1})$$

Bestimmung des Polynoms T(z):

$$T(z) = k_q\ T_1(z)$$

Die Bestimmung des Vorfaktors k_q gemäß Gl.(2.2.17) ist der Bestimmung von b_{wO} äquivalent.

Tabelle 2.3.1. Fortsetzung

Eine Überprüfung, ob A(z) und B(z) teilerfremd sind, kann durch Einsetzen der Nullstellen des B-Polynoms in das A-Polynom geschehen. Wittenmark und Åström (1980) schlagen für den Fall, daß A(z) den Grad 2 und B(z) den Grad 1 besitzt, die Überprüfung von

$$b_1^2 - a_1b_ob_1 + a_2b_o = T_{cf} \qquad (2.3.1)$$

durch die Bedingung

$$T_{cf} \leq \varepsilon \cdot \max(b_o^2,\ b_1^2)$$

vor. Damit variiert die Schranke mit der Größe der Koeffizienten. Eine Überprüfung für den Fall, daß B(z) den Grad 2 besitzt, kann durch Berechnung von $A(1/\beta) = T_{cf1}$ und $A(1/\beta_{MP}) = T_{cf2}$ erfolgen. Für eine Überprüfung unabhängig von der Verstärkung der Regelstrecke liegt die Beziehung

$$T_{cf1/2} \leq \varepsilon \max (b_o^2,\ b_1^2,\ b_2^2) \qquad (2.3.2)$$

nahe.

Falls eine gemeinsame Wurzel der Polynome A(z) und B(z) vorliegt, muß sie zur Sicherung der Eindeutigkeit der Polynomgleichung gekürzt werden. Die Reglerpolynome reduzieren sich entsprechend.

2.3.2. Das Parameterschätzverfahren zur Bestimmung der Regelstreckenparameter

Zur Bestimmung der Parameter der Regelstrecke wird ein Parameterschätzverfahren verwendet. In diesem Fall wird wahlweise die Least-Squares-Methode (LS-Methode) oder, falls eine stochastische Störung vorhanden ist, die zweite Erweiterte Matrizenmethode (2. EM-Methode) verwendet. Bei beiden Verfahren wird eine exponentielle Gewichtung der alten Meßdaten berücksichtigt. Falls eine deterministische Störung vorhanden ist, kann durch Einführung eines zusätzlichen zu schätzenden Gleichanteils die Schätzung verbessert werden. Der Gleichanteil kann wahlweise als mit den anderen Signalen korreliert oder als nicht korreliert betrachtet werden (Aström (1979b)). Zur numerischen Berechnung wird der "Square-Root-Filter"-Algorithmus (Peterka (1975), Clarke et al (1975)) verwendet, mit dem bereits gute Erfahrungen vorliegen (Korecky (1980), Stürz (1980)).

Die gewöhnliche rekursive LS-Methode mit exponentieller Datenwichtung läßt sich für die Schätzung der Parameter einer Regelstrecke mit der Ausgangsgröße

$$Y(z) = \frac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)}\, z^{-d} U(z) \qquad (2.3.3)$$

mit

$$\hat{B}(z) = \hat{b}_o + \hat{b}_1 z^{-1} + \ldots \hat{b}_m z^{-m} \qquad (2.3.4a)$$

$$\hat{A}(z) = 1 + \hat{a}_1 z^{-1} + \ldots \hat{a}_n z^{-n} \qquad (2.3.4b)$$

und den Vektoren

$$\underline{\hat{p}}_k^T = \left[\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots \hat{a}_n, \hat{b}_o, \ldots \hat{b}_m\right] \tag{2.3.5a}$$

$$\underline{m}_{k-d+1}^T = \left[-y_{k-1}, \ldots -y_{k-n}, u_{k-d}, u_{k-d-1} \ldots u_{k-d-m}\right] \tag{2.3.5b}$$

in der folgenden Form beschreiben

$$\underline{\hat{p}}_k = \underline{\hat{p}}_{k-1} + \underline{g}_k \nu_k \tag{2.3.6a}$$

$$\nu_k = y_k - \underline{p}_{k-1}^T \underline{m}_{k-d+1} \tag{2.3.6b}$$

$$\underline{g}_k = \underline{\Lambda}_{k-1} \underline{m}_k \frac{1}{\gamma + \underline{m}_{k-d+1}^T \underline{\Lambda}_{k-1} \underline{m}_{k-d+1}} \tag{2.3.6c}$$

$$\underline{\Lambda}_k = \frac{1}{\gamma}\left[\underline{I} - \underline{\Lambda}_{k-1} \underline{m}_{k-d+1} \underline{m}_{k-d+1}^T (\gamma + \underline{m}_{k-d+1}^T \underline{\Lambda}_{k-1} \underline{m}_{k-d+1})^{-1}\right] \underline{\Lambda}_{k-1}$$

mit $\gamma < 1$. (2.3.6d)

Beim "Square-Root-Filter"-Algorithmus wird nicht die Kovarianzmatrix $\underline{\Lambda}_k$ berechnet, sondern deren Wurzel $\underline{S}_k$. Es gilt (Peterka (1975)):

$$\underline{\Lambda}_k = \underline{S}_k \underline{S}_k^T \tag{2.3.7}$$

und damit für Gl.(2.3.6d)

$$\underline{S}_k \underline{S}_k^T = \frac{\underline{S}_{k-1}}{\gamma}\left[\underline{I} - \frac{\underline{S}_{k-1}^T \underline{m}_{k-d+1} \underline{m}_{k-d+1}^T \underline{S}_{k-1}}{\mu^2}\right] \underline{S}_{k-1}^T . \tag{2.3.8}$$

Mit

$$\mu^2 = \gamma + \underline{m}_{k-d+1}^T \underline{S}_{k-1} \underline{S}_{k-1}^T \underline{m}_{k-d+1} \tag{2.3.9}$$

und

$$\underline{f} = \underline{S}_{k-1}^T \underline{m}_{k-d+1} \tag{2.3.10}$$

ergibt sich

$$\underline{S}_k \, \underline{S}_k^T = \frac{1}{\gamma} \, \underline{S}_{k-1} \left[\underline{I} - \frac{\underline{f}\underline{f}^T}{\mu^2} \right] \underline{S}_{k-1}^T \tag{2.3.11}$$

und mit der (n+m+2)·(n+m+2) Transformationsmatrix $\underline{T}$

$$\underline{S}_k \, \underline{S}_k^T = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \, \underline{S}_{k-1} \left[\underline{I} \;\vdots\; j \frac{\underline{f}}{\mu} \right] \underline{T} \, \underline{T}^T \left[\begin{array}{c} \underline{I} \\ \hdashline j \, \frac{\underline{f}^T}{\mu} \end{array} \right] \frac{\underline{S}_{k-1}^T}{\sqrt{\gamma}} \; . \tag{2.3.12}$$

Für μ ergibt sich als Beziehung gemäß Gl.(2.3.9) und (2.3.10)

$$\mu^2 = \gamma + \underline{f}^T \underline{f} \; . \tag{2.3.13}$$

Wird $\underline{T}$ so gewählt, daß

$$\left[\underline{I} \;\vdots\; j \frac{\underline{f}}{\mu} \right] \; \underline{T} = \left[\underline{H} \;\vdots\; \underline{O} \right] \tag{2.3.14}$$

gilt, so ergibt sich die Wurzel der Kovarianzmatrix

$$\underline{S}_k = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \, \underline{S}_{k-1} \, \underline{H} \; . \tag{2.3.15}$$

$\underline{H}$ wird als obere Dreiecksmatrix gewählt. Damit bleibt die obere Dreiecksmatrix $\underline{S}_{k-1}$ nach der Transformation ebenfalls eine Dreiecksmatrix.

Nach einigen Umformungen ergibt sich als Algorithmus zur Berechnung der einzelnen Komponenten (Peterka (1975)):

$$\mu_o = \gamma \tag{2.3.16a}$$

für $j = 1, \ldots, n+m+1$

$$f_j = \sum_{i=1}^{j} \underline{S}_{k-1}{}_{ij} \, \underline{m}_{k-d+1}{}_i \tag{2.3.16b}$$

$$a = \mu_{j-1}/\gamma \tag{2.3.16c}$$

$$b = f_j / \mu_{j-1}^2 \tag{2.3.16d}$$

$$\mu_j^2 = \mu_{j-1}^2 + f_j^2 \tag{2.3.16e}$$

$$\mu_j = \sqrt{\mu_j^2} \tag{2.3.16f}$$

$$c = a / \mu_j \tag{2.3.16g}$$

$$g_j = \underline{S}_{k-1_{jj}} f_j \tag{2.3.16h}$$

$$\underline{S}_{k_{jj}} = c \underline{S}_{k_{jj}} \tag{2.3.16j}$$

und mit

$$i = 1, \ldots, j-1 \tag{2.3.16k}$$

$$d = \underline{S}_{k-1_{ij}} \tag{2.3.16l}$$

$$\underline{S}_{k_{ij}} = c(d - b g_i) \tag{2.3.16m}$$

$$g_i = d f_j + g_i \,. \tag{2.3.16n}$$

Als Parameternachstellgesetz ergibt sich dann

$$\hat{\underline{p}}_k = \hat{\underline{p}}_{k-1} + \frac{\underline{g}}{\mu^2} (y_k - \hat{\underline{p}}_{k-1}^T \underline{m}_{k-d+1}) \,. \tag{2.3.17}$$

Dieser von Peterka (1975) vorgeschlagene Algorithmus bietet einige Vorteile:

- Durch die Verwendung der Wurzel der Kovarianzmatrix wird die numerische Genauigkeit des Algorithmus verbessert.

- Die Bedingung, daß die Kovarianzmatrix positiv definit ist, ist aufgrund der Quadratbildung stets erfüllt.

- Die Kovarianzmatrix wird als obere Dreiecksmatrix benutzt. Damit ist zum einen eine Speicherplatzreduzierung von n^2 Elementen auf $n\cdot(n+1)/2$ Elemente möglich. Gleichzeitig verkürzt sich die Zahl der notwendigen Rechenoperationen.

Eine Erweiterung des LS-Schätzverfahrens für die zusätzliche Schätzung eines Rauschfilterpolynoms bei stochastischen Störungen ist sehr einfach möglich. Der Parametervektor wird um die Parameter des C-Polynoms erweitert. Als entsprechende Signalwerte werden die zeitlich zurückliegenden Gleichungsfehler (Unbehauen et al (1974)) verwendet.

Zur Schätzung einer deterministischen Störung $\bar{d}$ wird der Parametervektor um einen Parameter erweitert. Das entsprechende Signal ist dabei konstant und gleich Eins.

Es ergibt sich dann als Beschreibung des Ausgangssignals der Regelstrecke analog zu Gl.(2.3.3)

$$Y(z) = \frac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)} z^{-d} U(z) + \frac{\hat{C}(z)}{\hat{A}(z)} \lambda\hat{E}(z) + \frac{\hat{\bar{d}}}{\hat{A}(z)} \qquad (2.3.18)$$

und als Parametervektor

$$\underline{\hat{p}}_{2EMk} = \left[\underline{\hat{p}}_k^T,\ \hat{c}_1,\ \ldots\ \hat{c}_n,\ \hat{\bar{d}}\right] \qquad (2.3.19)$$

sowie als Signalvektor

$$\underline{m}_{2EMk-d+1}^T = \left[\underline{m}_{k-d+1}^T,\ \nu_{k-1},\ \cdots\ \nu_{k-n},\ 1\right] \qquad (2.3.20)$$

2.3.3. Maßnahmen zur Verhinderung von sogenanntem "Estimator-Windup"

Unter dem Begriff "Estimator-Windup", der von Aström (1980) eingeführt wurde, wird der Effekt verstanden, daß bei einem Identifika-

tionsverfahren, dessen anregende Signale zu klein sind, aufgrund der exponentiellen Datenwichtung die Kovarianzmatrix exponentiell anwächst.

Gerade für eine ST-Regelstrategie für Führungsgrößenregelung muß bei fehlenden stochastischen Störungen und einem über sehr lange Zeit konstanten Führungssignal eine geeignete Abwehrmaßnahme gegen "Estimator-Windup" getroffen werden. Eine sehr einfache Methode wurde von Stürz (1980) erprobt. Die Identifikation wird abgeschaltet, falls die momentane Stellgrößendifferenz u(k)-u(k-1) und die Regelgrößendifferenz y(k)-y(k-1) unter einer vorgegebenen Schranke bleiben. Diese Methode erweist sich als sehr wirkungsvoll, da sie genau dann eine Abschaltung bewirkt, wenn die Dynamik der Regelstrecke nicht identifizierbar ist.

Eine zweite interessante Möglichkeit wird von Cordero (1979) vorgeschlagen. Cordero verfeinert einen Vorschlag von Fortescue, Kershenbaum und Ydstie (1977). Mit Hilfe eines variablen Gewichtungsfaktors kann der Effekt des "Estimator-Windup" verhindert werden.

Ausgangspunkt der Überlegungen von Fortescue, Kershenbaum und Ydstie ist der Gedanke, die Information, die dem Parameterschätzverfahren zur Verfügung steht, konstant zu halten. Dies bedeutet, daß zu einem Zeitpunkt, zu dem wenig Anregung zur Verfügung steht, alle bereits vorliegenden Signalwerte mitberücksichtigt werden. Dies ist gleichbedeutend mit einem Gewichtungsfaktor von Eins. Für den Fall einer sehr starken Signaländerung genügt es, um denselben Informationsgehalt zu erhalten, wesentlich weniger Signalwerte zu berücksichtigen. Entsprechend wird der Gewichtungsfaktor verkleinert. Dies führt zu einer Zunahme der Kovarianzmatrix und damit zu einer größeren Verstärkung im Parameternachstellgesetz.

Ein geeignetes Maß für den Informationsgehalt $I_C(k)$ stellt für den Fall, daß alle Zeitpunkte gleich berücksichtigt werden sollen, die Summe der Gleichungsfehler ν_k dar.

Der Informationsgehalt $I_C(k)$ des Parameterschätzverfahrens ist durch

$$I_C(k) = \sum_{i=o}^{k} \nu_i \qquad (2.3.21a)$$

oder in rekursiver Form durch

$$I_C(k) = I_C(k-1) + \left[1-\underline{m}_{k-d+1}^T \underline{g}_k\right]\nu_k^2 \qquad (2.3.21b)$$

beschreibbar. Werden vergangene Daten weniger gewichtet, ergibt sich daraus für den Informationsgehalt:

$$I_C(k) = I_C(k-1)\ \gamma + \left[1-\underline{m}_{k-d+1}^T \underline{g}_k\right]\nu_k^2 \ . \qquad (2.3.22)$$

Für den Fall, daß der Informationsgehalt konstant gehalten werden soll, resultiert daraus eine Beziehung für einen zeitvarianten Gewichtungsfaktor

$$I_C = I_C\ \gamma(k) + \left[1-\underline{m}_{k-d+1}^T \underline{g}_k\right]\nu_k^2 \ . \qquad (2.3.23)$$

Wird der Informationsgehalt zu klein vorgegeben, so kann Gl.(2.3.23) nur für einen negativen Gewichtungsfaktor $\gamma(k)$ erfüllt werden. Da einerseits ein negativer Gewichtungsfaktor der vergangenen Signalwerte sinnlos ist, andererseits ein zu kleines Informationsmaß I_C nicht angemessen ist, schlägt Cordero (1979) die Einführung einer unteren Grenze für $\gamma(k)$, eine automatische Anpassung des Informationsmaßes I_C und eine automatische Rücksetztechnik des Schätzalgorithmus vor.

Da einzelne Größen des Algorithmus unterschiedliche Dynamik besitzen, werden verschiedene Hilfsgrößen zur Anpassung des Maßes I_C verwendet. Diese Hilfsgrößen sind:

der aufsummierte Gleichungsfehler:

$$S_\nu(k) = S_\nu(k-1) + \nu_k^2 \ , \qquad (2.3.24)$$

die Varianz des Gleichungsfehlers:

$$\sigma_\nu(k) = \frac{S_\nu(k)}{k} \quad . \tag{2.3.25}$$

Für die Genauigkeit $G_p(k)$, die als arithmetischer Mittelwert der Genauigkeit der einzelnen Parameter definiert wird, ergibt sich

$$G_p(k) = \sigma_\nu(k) \frac{\sum_{i=1}^{n_p} \sqrt{p_{ii}(k)}}{n_p} \quad . \tag{2.3.26}$$

Dabei stellt n_p die Zahl der Parameter und p_{ii} die Hauptdiagonalelemente der Kovarianzmatrix dar.

Für $\sigma_\nu(k)$ und $G_p(k)$ werden obere Grenzen vorgegeben, bei deren Überschreiten der Schätzalgorithmus neu gestartet wird und das Informationsmaß mit einem Faktor multipliziert wird, der wenig größer als Eins ist. Wird I_C erhöht, so bedeutet dies für $\gamma(k)$, daß die anregenden Signale größer sein müssen als vor der Anpassung von I_C, um denselben kleinen Wert von $\gamma(k)$ zu ergeben. Durch die Nachführung von I_C wird erreicht, daß sich das Informationsmaß der jeweiligen Störungsintensität anpaßt.

Für die oberen Grenzen von $\sigma_\nu(k)$ und $G_p(k)$ werden jeweils die berechneten Werte zum Zeitpunkt $k = n_p$ verwendet, für die nach Start des Algorithmus zum erstenmal eine definierte Schätzung durchgeführt werden kann. Durch die Verwendung des Genauigkeitsmaßes $G_p(k)$ und seine Begrenzung kann die Kovarianzmatrix nicht unbegrenzt wachsen.

Unter dieser Bedingung konnte von Cordero (1979) für eine Kombination des Schätzverfahrens zusammen mit dem ST-Regler nach Åström und Wittenmark (1973) die globale Konvergenz der Parameter unter der Bedingung, daß keine stochastische Störung vorhanden ist, gezeigt werden.

Bei der Verwendung des von Cordero vorgeschlagenen Algorithmus wird im Vergleich zu einer Schätzung ohne variablen Gewichtungsfaktor ein schnelleres Einschwingen und ein ruhigeres Verhalten nach Erreichen des Endwertes erzielt, während in der Anfangsphase aufgrund des häufigen Rücksetzens bei sehr klein gewähltem I_C mit starken Parameterschwankungen gerechnet werden muß.

3. Einfache Self-Tuning-Regelstrategie für nichtminimalphasige Regelstrecken mit einer Nullstelle links des Einheitskreises

3.1. Einführung

Beim Entwurf von ST-Regelstrategien für nichtminimalphasige Regelstrecken mit einer Nullstelle links des Einheitskreises gelten dieselben einschränkenden Bedingungen wie bei den in Kapitel 2 betrachteten Regelstrecken. Bei Vorgabe einer Führungsübertragungsfunktion muß die nicht kompensierbare Nullstelle mit einbezogen werden. Damit enthält die Führungsübertragungsfunktion stets einen nicht beeinflußbaren Anteil. Für die Übergangsfunktion gilt dies entsprechend. Diese Einschränkung bei der Wahl der Führungsübertragungsfunktion wirkt sich bei der Regelung von sehr vielen Prozessen aus, da zahlreiche Regelstrecken, die im Kontinuierlichen zur Klasse der minimalphasigen Systeme gehören, im Diskreten nichtminimalphasig sind. Eine Nullstelle links des Einheitskreises tritt häufig bei Regelstrecken mit Integralanteil, aber auch bei Regelstrecken niedriger Ordnung auf.

Wird z. B. ein Verzögerungsglied 3. Ordnung mit zwei Zeitkonstanten

$$T_1 = T_2 = 1 \quad ^{1)}$$

und einer Zeitkonstanten

$$T_3 = 0{,}1$$

mit einer Abtastzeit von 0,5 bei Verwendung eines Haltegliedes nullter Ordnung z-transformiert, so ergeben sich im Diskreten zwei Nullstellen bei

$$z_1 = -1{,}3 \quad \text{und} \quad z_2 = -0{,}046 \ .$$

---

1) Hier, wie auch im weiteren, werden stets dimensionslose Größen betrachtet.

Eine ebenfalls sehr unangenehme Übertragungsfunktion der Regelstrecke für den Entwurf von Kompensationsreglern liegt dann vor, wenn die Übertragungsfunktion eine Nullstelle in der linken Hälfte des Einheitskreises besitzt. Theoretisch ist eine Kompensation durch einen Reglerpol möglich, doch sind sehr hohe Stellamplituden die Folge. Als Beispiel für die hohen Stellamplituden soll die in Bild 3.1.1 dargestellte Übergangsfunktion eines Reglers mit einem Pol bei $z = -0,8$ und einer Nullstelle bei $z = 0,7$ dienen.

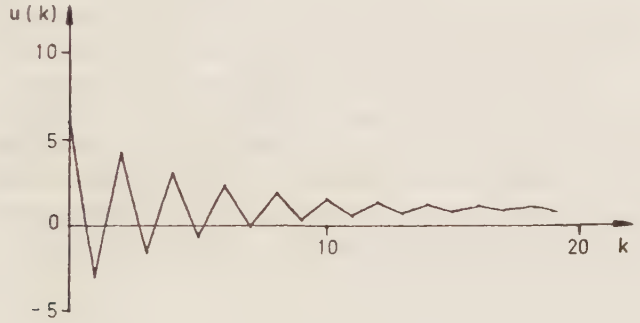

Bild 3.1.1. Übergangsfunktion eines Reglers mit der Verstärkung 1 und einem Pol bei $z = -0,8$ und einer Nullstelle bei $z = 0,7$

Muß ein unruhiges Stellsignal vermieden werden, ist die Einbeziehung einer solchen Nullstelle in die Führungsübertragungsfunktion unumgänglich. Diese Lage einer Nullstelle, die im Kontinuierlichen keine Entsprechung findet, tritt ebenfalls häufig bei Systemen niedriger Ordnung auf, wie sich an folgendem einfachen Beispiel zeigt.

Wird die Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{\frac{s}{4} + 1}{(s+1)\left(\frac{s}{0,11} + 1\right)} \qquad (3.1.1)$$

unter Verwendung eines Haltegliedes nullter Ordnung einer z-Transformation unterzogen, dann ergibt sich mit einer Abtastzeit von 1 die z-Übertragungsfunktion

$$G_{SZ}(z) = \frac{\left(\frac{z}{0,1922} + 1\right)\ 0,0325}{\left(\frac{z}{-0,3678} + 1\right)\left(\frac{z}{-0,08948} + 1\right)} \qquad (3.1.2)$$

mit einer Nullstelle bei $-0,1922$. Der Einfluß dieser Nullstelle, insbesondere bei Parameterschwankungen, auf die Übergangsfunktion kann bei der Verwendung einer ST-Regelstrategie vermindert werden, falls der Entwurf, der der Regelstrategie zugrunde liegt, analog zu Kapitel 2 von Kenngrößen der Übergangsfunktion ausgeht.

In Abschnitt 3.2 wird ein derartiger Entwurf für eine Führungsübertragungsfunktion zweiter Ordnung mit zwei konjugiert komplexen Polen und einer Nullstelle links des Einheitskreises entwickelt. Ergebnis des Entwurfs ist nicht, wie in Kapitel 2, die Aufstellung nichtlinearer Bestimmungsgleichungen zur Berechnung der Parameter der Führungsübertragungsfunktion, sondern ein Algorithmus, der die gesuchten Parameter nach wenigen Iterationen liefert. Dieser Algorithmus stellt die Entwurfsgrundlage einer einfachen ST-Regelstrategie dar.

3.2. Der Entwurf des Reglers

Als Führungsübertragungsfunktion (Modellübertragungsfunktion) wird, analog zu Kapitel 2, ein PT_2S-Glied mit zwei konjugiert komplexen Polen und einer Nullstelle vorgesehen. Damit besteht die Möglichkeit, einen relativ einfachen Algorithmus zur Berechnung der Übertragungsfunktion, deren Übergangsfunktion die gewünschten Spezifikationen einhält, zu entwickeln.

3.2.1. Die Forderungen an die Modellübergangsfunktion

Bei gegebener Nullstelle und gegebenem Verstärkungsfaktor sind zwei Parameter der Modellübertragungsfunktion, nämlich Dämpfung und Eigenfrequenz wählbar. Mit diesen beiden Parametern lassen sich im Zeitbereich ebenfalls zwei Parameter festlegen.

Zwei Parameter, die häufig für die Beschreibung einer diskreten Übergangsfunktion benutzt werden, sind die beiden in Bild 3.2.1 eingezeichneten Größen maximales Überschwingen e_{max} und die Zeit t_{max},

bei der der Maximalwert der Übergangsfunktion bzw. das maximale Überschwingen erreicht wird.

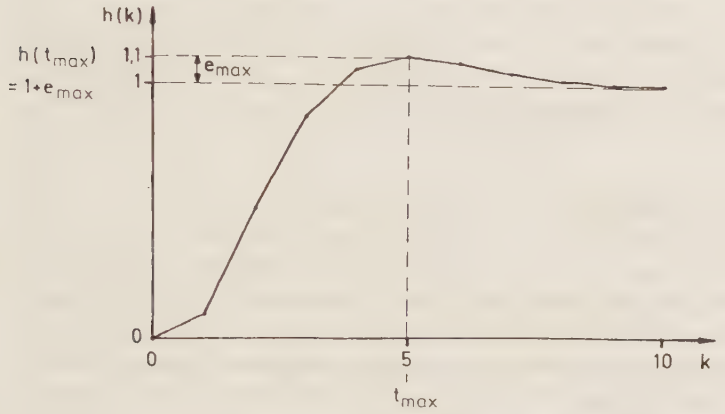

Bild 3.2.1a. Übergangsfunktion für eine Modellübertragungsfunktion mit einer Nullstelle links des Einheitskreises (Nullstelle bei $z = -3,37$)

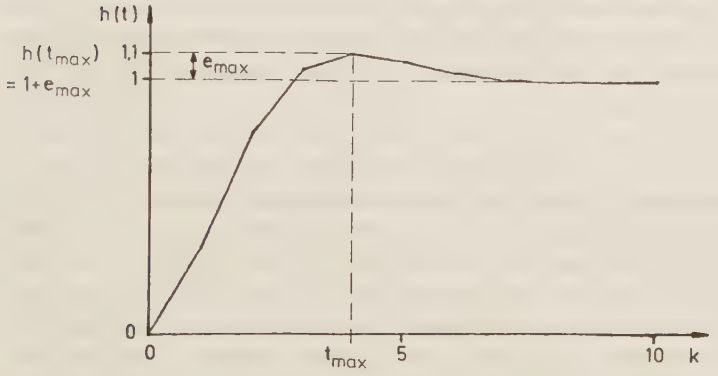

Bild 3.2.1b. Übergangsfunktion für eine Modellübertragungsfunktion mit einer Nullstelle in der linken Hälfte des Einheitskreises ($z = -0,5$)

Im folgenden soll ein Verfahren entwickelt werden, bei dem - ausgehend von vorgegebenen Werten für t_{max} und e_{max} und vorgegebener Nullstelle - iterativ die Lage des konjugiert komplexen Polpaars der Führungsübertragungsfunktion berechnet werden kann. Das angegebene Verfahren kann in ähnlicher Weise auch auf der Basis von Vorgaben anderer Zeitgrößen wie Verzugszeit t_{50} oder Anstiegszeit T_{a50} auf der Basis der hier dargestellten Beziehungen entwickelt werden.

3.2.2. Der Grundgedanke des Entwurfsverfahrens

Aus der Literatur (Unbehauen (1979), Landgraf und Schneider (1970)) ist bekannt, daß für kontinuierliche PT_2S-Glieder ein eindeutiger und expliziter Zusammenhang zwischen Dämpfung und maximalem Überschwingen und t_{max} und Dämpfung und Eigenfrequenz besteht. Dieser explizite Zusammenhang, der bereits beim Auftreten eines zusätzlichen Pols oder einer Nullstelle verlorengeht, ist einer der Gründe, weshalb vielen Syntheseverfahren gerade ein PT_2S-Glied als Grundlage dient. Unterziehen wir ein PT_2S-Glied einer z-Transformation mit Halteglied nullter Ordnung, so ergibt sich im Diskreten eine Nullstelle, deren Lage eine eindeutige Funktion der Pole und der Abtastzeit darstellt. Ein in der gleichen Weise transformiertes PT_2S-Glied mit Nullstelle besitzt eine Nullstelle, deren Lage ebenfalls eindeutig von der Lage der Pole und der Abtastzeit, aber noch zusätzlich von der kontinuierlichen Nullstelle abhängt.

Wird ein diskretes PT_2S-Glied mit einer Nullstelle rücktransformiert, ergibt sich im Kontinuierlichen eine Übertragungsfunktion, deren Sprungantwort zu den diskreten Zeitpunkten exakt mit den Werten der diskreten Sprungantwort übereinstimmt. Die Aufgabe der Bestimmung der Führungsübertragungsfunktion ist gelöst, falls eine geeignete Strategie zur Veränderung der kontinuierlichen Übertragungsfunktion gefunden werden kann. Ziel der Strategie ist es, die kontinuierliche Übertragungsfunktion so zu verändern, daß die Spezifikationen für e_{max} und t_{max} eingehalten werden und gleichzeitig die z-Transformierte der Übertragungsfunktion die diskrete Nullstelle der Regelstrecke, welche nicht kompensiert werden soll, enthält.

Die Parameter des Reglers können dann in gewohnter Weise aus den Parametern der Regelstrecke und der Führungsübertragungsfunktion berechnet werden.

Bei dem obigen Vorgehen stellt die Nullstelle der kontinuierlichen Führungsübertragungsfunktion, die zwar berechnet wird, aber nicht gleichzeitig Nullstelle der Regelstrecke ist, einen Parameter dar, der Hinweise gibt, wie die Pole der Modellübertragungsfunktion verschoben werden müssen, um die gewünschten Zeitspezifikationen zu erreichen.

Der Grund für die Benutzung der kontinuierlichen Nullstelle als Parameter liegt in der - im Unterschied zur z-Ebene - "Stetigkeit" des Einflusses von Nullstellen im s-Bereich. Befindet sich eine Nullstelle eines kontinuierlichen PT_2S-Gliedes in großem Abstand zu den Polen, so ist der Einfluß der Nullstelle auf die Übergangsfunktion um so geringer, je mehr die Nullstelle gegen unendlich wandert. Ein in der gleichen Weise "stetiger Einfluß" von Nullstellen existiert im z-Bereich nicht. Dies hängt mit dem Einfluß der kontinuierlichen Pole bei der z-Transformation auf die Nullstellen zusammen.

Wir betrachten nun eine kontinuierliche Übertragungsfunktion mit einer Nullstelle und zwei konjugiert komplexen Polen. Für das Zeitverhalten läßt sich feststellen, daß der Einfluß der Nullstelle sich auf die Übergangsfunktion auswirkt und sowohl t_{max} als auch e_{max} bzw. T_{a50} oder t_{50}, die wir für ein kontinuierliches System ohne Nullstelle bei gleicher Lage der Pole erhalten würden, "verfälscht". Falls der Abstand Nullstelle zu den Polen nicht zu klein ist, kann die "Verfälschung" abgeschätzt werden. Die Kenngrößen der Übergangsfunktion des kontinuierlichen PT_2S-Glieds mit Nullstelle lassen sich in der folgenden allgemeinen Form angeben:

$$e_{max}^{*} = e_{max}^{o} + \Delta e_{max}(NS) \qquad (3.2.1)$$

$$t_{max}^{*} = t_{max}^{o} + \Delta t_{max}(NS) \qquad (3.2.2)$$

$$\text{Kenngröße}^{*} = \text{Kenngröße}^{o} + \Delta\text{Kenngröße}(NS) \qquad (3.2.3)$$

(Der Index * kennzeichnet den Wert des PT_2S-Glieds mit Nullstelle und der Index o den Wert der Kenngröße für ein PT_2S-Glied ohne Nullstelle.) Der "Fehler" ΔKenngröße hängt dabei von der Lage der Nullstelle im Verhältnis zu den Polen ab. (Dies ist durch Kenngröße (NS) angedeutet.)

Ziel ist es nun, einen Algorithmus zu entwickeln, mittels dessen e_{max}^{o} und Δe_{max} bzw. t_{max}^{o} und Δt_{max} so berechnet werden, daß e_{max}^{*} und t_{max}^{*}, die durch die Nullstelle "verfälschten" Werte, den gewünschten Werten entsprechen. Die z-Transformierte der kontinuierlichen Nullstelle muß mit der vorgegebenen diskreten Nullstelle übereinstimmen.

Aus den Werten für e_{max}^{o} kann in eindeutiger Weise die Dämpfung d und aus t_{max} und d in eindeutiger Weise ω_o des kontinuierlichen PT_2S-Glieds ohne Nullstelle mittels expliziter Funktionen berechnet werden. Falls andere Kenngrößen, wie z. B. die Verzugszeit t_{50} oder die Anstiegszeit T_{a50} vorgegeben werden, ist eine Berechnung von Dämpfung und Eckfrequenz mittels expliziter und exakter Beziehungen nicht mehr möglich. Es können dann allerdings Näherungsformeln zu Hilfe genommen werden (siehe Anhang A5).

Das Verfahren zur Bestimmung der Führungsübertragungsfunktion läßt sich nun wie folgt zusammenfassen:

Für die gewünschten Werte der Zeitkenngröße t_{max} und des Überschwingens e_{max} werden bei einem kontinuierlichen PT_2S-Glied mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_o^2} + \frac{2ds}{\omega_o} + 1} \qquad (3.2.4)$$

die entsprechenden Werte für ω_o und d berechnet. Aufgrund des eindeutigen Zusammenhangs zwischen diskreter und kontinuierlicher Nullstelle wird aus der "kritischen" Nullstelle der Regelstrecke und den berechneten Werten für ω_o und d eine kontinuierliche Null-

stelle berechnet. Damit ist für die diskrete Führungsübertragungsfunktion die Bedingung erfüllt, daß die diskrete Nullstelle genau der "kritischen" Streckennullstelle entsprechen soll. Betrachten wir allerdings die Übergangsfunktion, so ist einsichtig, daß die Werte der Zeitkenngröße t_{max} und des Überschwingens e_{max} durch die Nullstelle "verfälscht" sind. Diese Verfälschungen lassen sich mittels noch zu entwickelnder Näherungsformeln aus der Lage der kontinuierlichen Nullstelle berechnen. Im nächsten Schritt des Verfahrens werden die Werte für ω_o und d derart korrigiert, daß die Differenz aus der gewünschten Kenngröße und der im vorigen Schritt berechneten "Verfälschung" durch das PT_2S-Glied ohne Nullstelle erreicht wird. Damit sind zwar die Spezifikationen für die Zeitfunktion durch die kontinuierliche Übertragungsfunktion erfüllt. Die Bedingung, daß die entsprechende diskrete Übertragungsfunktion - die aus der kontinuierlichen Übertragungsfunktion durch z-Transformation entsteht - die "kritische" Nullstelle enthalten soll, ist verletzt, da aufgrund der Verschiebung sich eine etwas andere diskrete Nullstelle ergibt. Mittels des Zusammenhangs zwischen diskreter und kontinuierlicher Nullstelle läßt sich allerdings aus der diskreten Nullstelle und den korrigierten Werten für Dämpfung und Eigenfrequenz eine korrigierte kontinuierliche Nullstelle berechnen. Diese korrigierte Nullstelle bewirkt eine etwas andere "Verfälschung". Mit dieser neu berechneten kontinuierlichen Nullstelle und den vorgegebenen Spezifikationen lassen sich im nächsten Schritt neue Werte für die Dämpfung d und die Eigenfrequenz ω_o berechnen. Streben die Werte für ω_o und d gegen feste Werte, "konvergiert" das Verfahren. Nach Erreichen der festen Werte lassen sich die Koeffizienten der gewünschten Führungsübertragungsfunktion mittels z-Transformation bestimmen.

In den folgenden Abschnitten sollen nun die notwendigen Beziehungen zur Berechnung der Kenngrößen der Übergangsfunktion für PT_2S-Glieder mit und ohne Nullstelle, die als Grundlage des skizzierten Verfahrens dienen, entwickelt werden.

3.2.3. Der Zusammenhang der Kenngrößen im Zeitbereich zwischen einem PT_2S-Glied ohne Nullstelle und einem PT_2S-Glied mit Nullstelle

Im folgenden soll der Zusammenhang der Kenngrößen e_{max} und t_{max} zwischen einem PT_2S-Glied ohne Nullstelle und zwischen einem PT_2S-Glied mit Nullstelle entwickelt werden. Auf den Zusammenhang für die Verzugszeit t_{50} und T_{a50} wird an dieser Stelle aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet und auf Anhang A4 verwiesen. Zur Unterscheidung der Größen für ein PT_2S-Glied mit und ohne Nullstelle werden die Größen, die sich auf ein PT_2S-Glied mit Nullstelle beziehen, mit dem Index "*" gekennzeichnet.

3.2.3.1. Die Grundgleichungen

Die Übertragungsfunktion eines PT_2S-Glieds ohne Nullstelle lautet:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2ds}{\omega_o} + \frac{s^2}{\omega_o^2}} . \qquad (3.2.5)$$

Die entsprechende Übergangsfunktion erhalten wir zu:

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} e^{-d\omega_o t} \cos(\omega_o \sqrt{1-d^2}\, t - \phi) .$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \qquad (3.2.6)$$

bzw.

$$h(t) = 1 - e^{-d\omega_o t}\left[\frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\, t + \cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\, t\right] . \qquad (3.2.7)$$

Die Gewichtsfunktion ergibt sich zu

$$g(t) = \frac{\omega_o}{\sqrt{1-d^2}} e^{-d\omega_o t} \sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\, t \qquad (3.2.8)$$

und ihre Ableitung

$$\dot{g}(t) = e^{-d\omega_o t}\left[\frac{-\omega_o^2 d}{\sqrt{1-d^2}} \sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\, t + \omega_o^2 \cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\, t\right] \qquad (3.2.9)$$

Die Übertragungsfunktion eines PT_2S-Glieds mit Nullstelle lautet:

$$G^*(s) = \frac{\frac{s}{f} + 1}{1 + \frac{2ds}{\omega_o} + \frac{s^2}{\omega_o^2}} \qquad (3.2.10)$$

bzw. mit dem dimensionslosen Normierungsfaktor κ:

$$f = \kappa \cdot \omega_o \qquad (3.2.11)$$

$$G^*(s) = \frac{\frac{s}{\kappa\omega_o} + 1}{1 + \frac{2ds}{\omega_o} + \frac{s^2}{\omega_o^2}} \qquad (3.2.12)$$

oder unter Verwendung von Gl.(3.2.5)

$$G^*(s) = \left(\frac{s}{\kappa\omega_o} + 1\right) \cdot G(s) \,. \qquad (3.2.13)$$

Die entsprechende Übergangsfunktion läßt sich gemäß Gl.(3.2.13) als Summe der Übergangsfunktion und der mit $1/\kappa\omega_o$ bewerteten Gewichtsfunktion des PT_2S-Glieds ohne Nullstelle darstellen:

$$h^*(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{G^*(s)}{s}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{sG(s)}{s\kappa\omega_o}\} = h(t) + \frac{g(t)}{\kappa\omega_o} \,. \qquad (3.2.14)$$

Analog ergibt sich für die Gewichtsfunktion

$$g^*(t) = g(t) + \frac{\dot{g}(t)}{\kappa\omega_o} \,. \qquad (3.2.15)$$

Die oben eingeführte dimensionslose Größe κ beschreibt das Verhältnis des Abstands der Pole und der Nullstelle vom Ursprung (siehe Bild 3.2.2a und 3.2.2b). Für ein PT_2S-Glied ohne Nullstelle ergibt sich $\kappa \to \infty$.

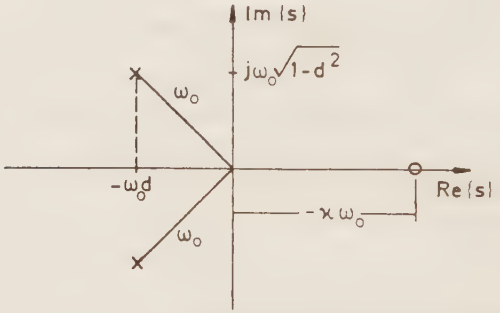

Bild 3.2.2a. Pol-Nullstellenkonfiguration eines kontinuierlichen PT_2S-Glieds mit einer Nullstelle in der rechten Halbebene ($\kappa < 0$)

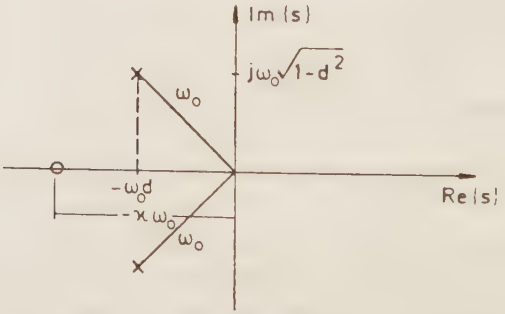

Bild 3.2.2b. Pol-Nullstellenkonfiguration eines kontinuierlichen PT_2S-Glieds mit einer Nullstelle in der linken Halbebene ($\kappa > 0$)

3.2.3.2. Der Zusammenhang für das Überschwingen e_{max} und die Zeit bis zum Erreichen des Überschwingens t_{max} für ein kontinuierliches PT_2S-Glied mit und ohne Nullstelle

Der Wert des maximalen Überschwingens e_{max} bzw. e^*_{max} wird zum Zeitpunkt t_{max} bzw. t^*_{max} entsprechend den Bildern 3.2.3 und 3.2.4 erreicht.

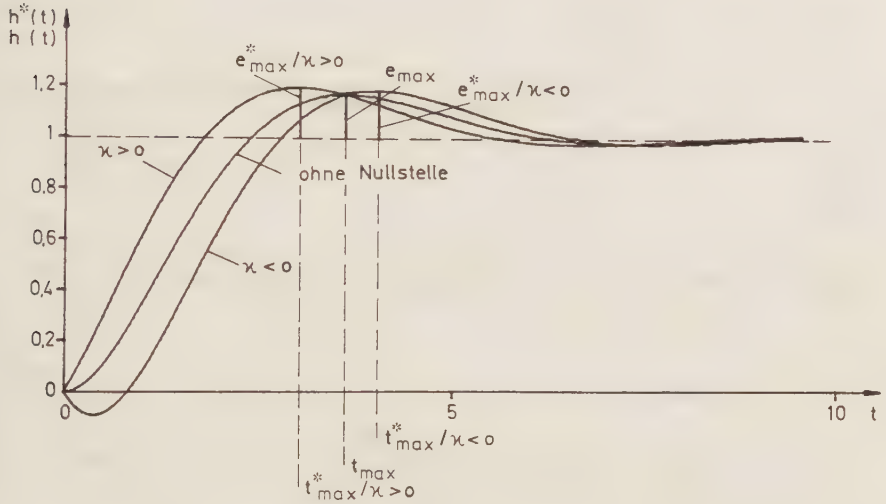

Bild 3.2.3. Übergangsfunktion für PT_2S-Glied mit und ohne Nullstelle ($\kappa = \pm 5$)

Als Bedingung für t_{max} erhalten wir für das PT_2S-Glied ohne Nullstelle:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=t_{max}} = g(t_{max}) \stackrel{!}{=} 0 \qquad (3.2.16)$$

und damit mit Gl.(3.2.8)

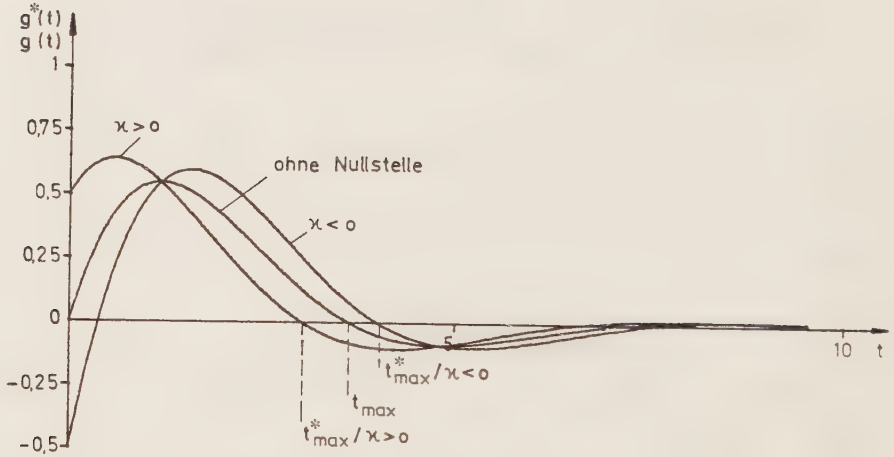

Bild 3.2.4. Gewichtsfunktion für PT_2S-Glied mit und ohne Nullstelle ($\kappa = \pm 5$)

$$\sqrt{1-d^2}\ \omega_o t_{max} = \pi$$

$$t_{max} = \frac{\pi}{\sqrt{1-d^2}\cdot\omega_o} \,. \qquad (3.2.17)$$

Der Wert des maximalen Überschwingens berechnet sich gemäß Gl. (3.2.7) mit Gl.(3.2.17) zu

$$e_{max} = h(t_{max})-1 = 1-e^{-\frac{d\omega_o\cdot\pi}{\omega_o\sqrt{1-d^2}}}\cdot\cos\pi-1$$

$$= e^{-\frac{d\pi}{\sqrt{1-d^2}}} \,. \qquad (3.2.18)$$

Für das PT_2S-Glied mit Nullstelle ergibt sich analog zu Gl.(3.2.16) als Bedingung für t^*_{max}:

$$\left.\frac{dh^*}{dt}\right|_{t=t^*_{max}} = g^*(t^*_{max}) \stackrel{!}{=} 0 \,. \tag{3.2.19}$$

Die Gewichtsfunktion $g^*(t^*_{max})$ kann dabei als Summe der Gewichtsfunktion des PT_2S-Gliedes ohne Nullstelle und einem gewichteten Term ihrer Ableitung dargestellt werden. Damit erhalten wir mit Gl.(3.2.15)

$$\left.\frac{dh^*}{dt}\right|_{t=t^*_{max}} = g(t^*_{max}) + \frac{1}{\kappa\omega_o} \cdot \dot{g}(t^*_{max}) \stackrel{!}{=} 0 \tag{3.2.20}$$

und mit Gl.(3.2.8) und (3.2.9)

$$\left.\frac{dh^*}{dt}\right|_{t=t^*_{max}}$$

$$= e^{-d\omega_o t^*_{max}} \left[\left(\frac{\omega_o}{\sqrt{1-d^2}} - \frac{\omega_o d}{\kappa\sqrt{1-d^2}} \right) \sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\; t^*_{max} + \frac{\omega_o}{\kappa} \cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\; t^*_{max} \right] \stackrel{!}{=} 0$$

bzw.

$$\tan\omega_o\sqrt{1-d^2}\; t^*_{max} = \frac{\frac{-\omega_o}{\kappa}}{\frac{\omega_o}{\sqrt{1-d^2}} - \frac{\omega_o d}{\kappa\sqrt{1-d^2}}} \,. \tag{3.2.21}$$

Mit $\tan\varphi - \pi = \tan\varphi$ und $\pi = \sqrt{1-d^2}\omega_o t_{max}$ ergibt sich:

$$\tan\omega_o\sqrt{1-d^2}(t^*_{max} - t_{max}) = \frac{\sqrt{1-d^2}}{d-\kappa} \tag{3.2.22}$$

und damit als Differenz

$$t^*_{max} - t_{max} = \frac{1}{\omega_o\sqrt{1-d^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d-\kappa} \,. \tag{3.2.23}$$

Für kleine Werte des Arguments, d. h. große Werte von κ kann die arctg-Funktion durch ihr Argument angenähert werden. Damit erhalten wir

$$t^*_{max} - t_{max} \approx \frac{1}{\omega_o(d-\kappa)} \quad . \tag{3.2.24}$$

Die Abhängigkeit der Differenz $t^*_{max} - t_{max}$ vom Vorzeichen von κ ist deutlich in den Bildern 3.2.3 und 3.2.4 zu erkennen.

Die Berechnung des maximalen Überschwingens für ein PT_2S-Glied mit Nullstelle erfolgt aufgrund der Kenntnis von t^*_{max}.

Für den Wert des maximalen Überschwingens erhalten wir mit Gl. (3.2.14):

$$e^*_{max} = h^*(t^*_{max})-1 = h(t^*_{max}) + \frac{g(t^*_{max})}{\kappa\omega_o} - 1 \quad . \tag{3.2.25}$$

Beziehen wir das maximale Überschwingen auf das Überschwingen eines PT_2S-Glieds ohne Nullstelle, so ergibt sich

$$\frac{e^*_{max}}{e_{max}} = \frac{h^*(t^*_{max})-1}{e_{max}} = \frac{h(t^*_{max})-1}{e_{max}} + \frac{g(t^*_{max})}{\kappa\omega_o \cdot e_{max}} \quad . \tag{3.2.26}$$

Die Abschätzung des Verhältnisses e^*_{max} zu e_{max} erfolgt in zwei getrennten Schritten. Wir berechnen in einem ersten Schritt die Veränderung der Übergangsfunktion $h(t^*_{max})$ durch die Veränderung der Zeit von t_{max} zu t^*_{max} und in einem zweiten Schritt den durch die Gewichtsfunktion verursachten Term. Unter Verwendung von Gl. (3.2.7) und (3.2.18) erhalten wir für den ersten Term:

$$\frac{h(t^*_{max})-1}{e_{max}} = -e^{-d\omega_o t^*_{max}} \frac{\left[\frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\; t^*_{max} + \cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\; t^*_{max}\right]}{-\frac{\pi d}{e^{\sqrt{1-d^2}}}}$$

mit der Näherung für t^*_{max} gemäß Gl.(3.2.24) sowie mit Gl.(3.2.17)

$$\frac{h(t^*_{max})-1}{e_{max}} = \frac{-e^{-\frac{d\pi}{\sqrt{1-d^2}}-\frac{d}{d-\kappa}}\left[\frac{d}{\sqrt{1-d^2}}\sin(\pi+\frac{\sqrt{1-d^2}}{d-\kappa})+\cos(\pi+\frac{\sqrt{1-d^2}}{d-\kappa})\right]}{e^{-\frac{\pi d}{\sqrt{1-d^2}}}}$$

$$= e^{-\frac{d}{d-\kappa}}\left(\frac{d}{\sqrt{1-d^2}}\sin\frac{\sqrt{1-d^2}}{d-\kappa}+\cos\frac{\sqrt{1-d^2}}{d-\kappa}\right) .$$

Unter Verwendung von Gl.(3.2.21) folgt

$$\frac{h(t^*_{max})-1}{e_{max}} = e^{-\frac{d}{d-\kappa}}\left(\frac{d}{\sqrt{1-d^2}}\sin\frac{\sqrt{1-d^2}}{d-\kappa}+\frac{1}{\sqrt{1-d^2}}(d-\kappa)\sin\frac{\sqrt{1-d^2}}{d-\kappa}\right) .$$

Für große Werte von κ kann die Sinusfunktion durch ihr Argument ersetzt werden und die Exponentialfunktion durch eine Reihe angenähert werden. Damit ergibt sich:

$$\frac{h(t^*_{max})-1}{e_{max}} \approx \left(1-\frac{d}{d-\kappa}\right)\left(\frac{d}{d-\kappa}+1\right) = \left(1-\frac{d^2}{(d-\kappa)^2}\right) . \qquad (3.2.27)$$

Die Abschätzung für den zweiten durch die Gewichtsfunktion bestimmten Term in Gl.(3.2.26) erfolgt analog. Aus Gl.(3.2.8) und (3.2.18) erhalten wir mit Gl.(3.2.24)

$$\frac{g(t^*_{max})}{\kappa\omega_o\, e_{max}} = \frac{\frac{\omega_o}{\sqrt{1-d^2}}\, e^{-\frac{d\pi}{\sqrt{1-d^2}}-\frac{d}{d-\kappa}}\cdot\sin(\pi+\frac{\sqrt{1-d^2}}{d-\kappa})}{\kappa\omega_o e^{-\frac{d\pi}{\sqrt{1-d^2}}}}$$

$$\approx \frac{-e^{-\frac{d}{d-\kappa}}}{(d-\kappa)\kappa}$$

bzw. nach Entwicklung der Exponentialfunktion in eine Reihe

$$\frac{g(t^*_{max})}{\kappa\omega_o e_{max}} = \frac{-1}{(d-\kappa)\kappa}\left(1-\frac{d}{d-\kappa}\right) = \frac{-1}{(d-\kappa)\kappa}\left(\frac{d-\kappa-d}{d-\kappa}\right) = \frac{1}{(d-\kappa)^2} \quad . \tag{3.2.28}$$

Damit erhalten wir als Ergebnis für das Verhältnis des Überschwingens mit Nullstelle zum Überschwingen ohne Nullstelle gemäß Gl. (3.2.26) mit den Gln.(3.2.27) und (3.2.28)

$$\frac{e^*_{max}}{e_{max}} = 1 + \frac{1-d^2}{(d-\kappa)^2} \quad . \tag{3.2.29}$$

3.2.4. Verfahren zur Bestimmung der Pole der Modellübertragungsfunktion bei vorgegebener diskreter Nullstelle der Regelstrecke

3.2.4.1. Vorbemerkung

Mit den in den vorigen Abschnitten hergeleiteten Näherungsbeziehungen stehen uns nun Hilfsmittel zur Verfügung, um für die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises eine geeignete Übertragungsfunktion zu berechnen. Diese Übertragungsfunktion soll eine der Nullstellen der Regelstrecke beinhalten. Diese ist, wie in Abschnitt 3.1 betont wurde, sinnvollerweise die nichtminimalphasige Nullstelle bzw. die im Einheitskreis am weitesten links liegende Nullstelle.

Die Zeit t_{max} bis zum Erreichen des maximalen Überschwingens und das Überschwingen, die die Ausgangsbasis des Entwurfs darstellen, sind Spezifikationen, die sich auf eine Führungsübertragungsfunktion der Form

$$G_W(z) = \frac{b_{wo} + b_{w1}z^{-1}}{1 + a_{w1}z^{-1} + a_{w2}z^{-2}}\, z^{-1} \tag{3.2.30}$$

beziehen.

Besitzt die Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion

$$G_S(z) = \frac{B(z)}{A(z)}\, z^{-d} \tag{3.2.31}$$

mit

$$B(z) = b_o + b_1 z^{-1} + \dots\ b_m z^{-m}$$

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots\ a_n z^{-n}$$

eine diskrete Totzeit $d > 1$, dann lautet die entsprechende Führungsübertragungsfunktion

$$G_{W1}(z) = \frac{b_{wo} + b_{w1} z^{-1}}{1 + a_{w1} z^{-1} + a_{w2} z^{-2}}\, z^{-d}\,. \tag{3.2.32}$$

Die Vorgabe von t_{max} beim Algorithmus bezieht sich auf die Führungsübertragungsfunktion gemäß Gl.(3.2.30), obwohl das maximale Überschwingen tatsächlich erst bei einer Führungsübertragungsfunktion gemäß Gl.(3.2.32) zum Zeitpunkt

$$t_{max1} = t_{max} + (d-1)T \tag{3.2.33}$$

erreicht wird.

Im folgenden soll zuerst der bereits in Abschnitt 3.2.2 skizzierte Grundgedanke des Entwurfsverfahrens ausführlich dargestellt werden. Daran anschließend wird der Algorithmus in einem Flußdiagramm zusammengefaßt, so daß der iterative Lösungsweg deutlich zu erkennen ist.

3.2.4.2. Der Algorithmus

Wir nehmen an, die Regelstrecke enthalte eine Nullstelle ß, die nach Voraussetzung in der zu bestimmenden Führungsübertragungsfunktion gemäß Gl.(3.2.30) enthalten sein muß. Die Forderungen an die Übergangsfunktion der Führungsübertragungsfunktion seien durch folgende spezielle Werte vorgegeben:

$$e_{max} = e_{max\,s} \tag{3.2.34}$$

$$t_{max} = t_{max\,s} = k_s T \,. \tag{3.2.35}$$

Wird für die Berechnung T=1 gewählt, so gibt k_s die Zahl der Abtastungen bis zum Erreichen des maximalen Überschwingens an. Bei einer Wahl von k_s als ganze Zahl wird die Führungsübertragungsfunktion im Maximum abgetastet. Der exakte Wert von e_{max} kann dann leicht überprüft werden.

Als "Anfangswert" - dies ist durch den Indes "o" gekennzeichnet - kann aus den Spezifikationen gemäß Gln.(3.2.34) und (3.2.35) Dämpfung und Eigenfrequenz eines PT_2S-Glieds ohne Nullstelle berechnet werden. Gemäß Gl.(3.2.18) erhalten wir nach Umformung

$$d_o = \frac{-\ln e_{max\,s}}{\sqrt{\pi^2 + (\ln e_{max\,s})^2}} \tag{3.2.36}$$

oder, falls e_{max} in Prozent angegeben wird,

$$d_o = \frac{-\ln e_{max\,s} + \ln 100}{\sqrt{\pi^2 + (\ln e_{max} - \ln 100)^2}} \,. \tag{3.2.37}$$

Die entsprechende Eigenfrequenz bestimmt sich gemäß Gl.(3.2.17) zu

$$\omega_{oo} = \frac{\pi}{\sqrt{1-d_o^2}\, t_{max\,s}} \,. \tag{3.2.38}$$

Die Übergangsfunktion des durch ω_{oo} und d_o festgelegten PT_2S-Glieds ohne Nullstelle erfüllt exakt die Forderungen gemäß Gln.(3.2.34) und (3.2.35). Wird die kontinuierliche Übertragungsfunktion unter Einbeziehung eines Halteglieds nullter Ordnung z-transformiert, und fiele die entstehende diskrete Nullstelle genau mit der Nullstelle ß der Regelstrecke zusammen, wäre die Aufgabe beendet. Im allgemeinen ist dies aber nicht der Fall. Mittels der Beziehung zwischen kontinuierlicher und diskreter Nullstelle kann untersucht

werden, welcher kontinuierlichen Nullstelle der Führungsübertragungsfunktion $s = -f_o$ die Nullstelle β der Regelstrecke bei vorgegebener Dämpfung und Eigenfrequenz gemäß Gln.(3.2.37) und (3.2.38) entsprechen würde.

Für ein PT_2S-Glied mit Nullstelle mit der Übertragungsfunktion

$$G^*(s) = \frac{\frac{s}{f} + 1}{\frac{s}{\omega_o} + \frac{2ds}{\omega_o} + 1} \qquad (3.2.39)$$

ergibt sich als diskrete Nullstelle β_f nach z-Transformation mit einem Halteglied nullter Ordnung

$$\beta_f = 1 + \frac{e^{-2d\omega_o T} - 2e^{-d\omega_o T}\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T + 1}{e^{-d\omega_o T}\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T + \frac{e^{-d\omega_o T}}{\sqrt{1-d^2}}\left(\frac{df-\omega_o}{f}\right)\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T - 1} \cdot$$

(3.2.40)

Zur Berechnung der kontinuierlichen Nullstelle aufgrund der vorgegebenen diskreten Nullstelle und vorgegebenen Pole und festgelegter Abtastzeit wird Gl.(3.2.40) invertiert. Es ergibt sich nach trivialer Zwischenrechnung für die kontinuierliche Nullstelle:

$$f = \frac{-\omega_o \sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T(\beta_f - 1)}{\left[e^{-d\omega_o T} - 2\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T + e^{d\omega_o T} - \cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T(\beta_f - 1)\right]\sqrt{1-d^2}}$$

$$\frac{}{- d\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T(\beta_f - 1) + (\beta_f - 1)\sqrt{1-d^2}\,e^{\omega_o dT}} \cdot \qquad (3.2.41)$$

Mit dieser Beziehung kann jetzt, ausgehend von der diskreten Nullstelle β der Regelstrecke und den in Gln.(3.2.37) und (3.2.38) berechneten Werten für ω_{oo} und d_o eine kontinuierliche Nullstelle f_o berechnet werden. Es gilt:

$$f_o = \frac{-\omega_{oo}\sin\omega_{oo}\sqrt{1-d_o^2}\,T\,(\beta-1)}{\left[e^{-d_o\omega_{oo}T} - 2\cos\omega_{oo}\sqrt{1-d_o^2}\,T + e^{d_o\omega_{oo}T} - \cos\omega_{oo}\sqrt{1-d_o^2}\,T\,(\beta-1)\right]\sqrt{1-d_o^2}}$$

$$\frac{}{-d_o\sin\omega_{oo}\sqrt{1-d_o^2}\,T\,(\beta-1) + (\beta-1)\sqrt{1-d_o^2}\;e^{\omega_{oo}d_oT}}\,. \qquad (3.2.42)$$

Als Ergebnis dieser durchgeführten Berechnungen erhalten wir eine kontinuierliche Übertragungsfunktion

$$G^o(s) = \frac{\frac{s}{f_o} + 1}{\frac{s^2}{\omega_{oo}^2} + \frac{2ds}{\omega_{oo}} + 1}\,, \qquad (3.2.43)$$

deren z-Transformierte mit Halteglied die Nullstelle β besitzt. Die Kenngrößen der Übergangsfunktion werden allerdings nicht mehr erfüllt, da durch die zusätzliche Nullstelle bei $s = -f_o$ eine "Verfälschung" eingetreten ist. Diese Verfälschung kann jetzt mittels der in Abschnitt 3.2.3.2 entwickelten Näherungsformeln (Gln.(3.2.24) und (3.2.29)) berechnet werden. Nach Einführung des dimensionslosen Faktors

$$\kappa_o = f_o/\omega_{oo} \qquad (3.2.44)$$

analog zu Gl.(3.2.10) - (3.2.12) ergibt sich als tatsächlicher Wert für die Zeit t_{max}

$$t_{max} \approx t_{max\,s} + \frac{1}{\omega_{oo}(d_o-\kappa_o)} \qquad (3.2.45)$$

und für das Überschwingen

$$e_{max} = e_{max\,s}\left(1 + \frac{1-d_o^2}{(d_o-\kappa_o)^2}\right) \qquad (3.2.46)$$

Im nächsten und in den folgenden Schritten des Verfahrens werden die berechneten "Verfälschungen" benutzt, um neue Werte für die Kenngrößen des PT_2S-Glieds ohne Nullstelle zu berechnen.

Als Kenngrößen für den ersten Schritt - gekennzeichnet durch den Index "1" - fordern wir für das PT_2S-Glied ohne Nullstelle gemäß Gl.(3.2.29) und Gl.(3.2.24)

$$e_{max1} = \frac{e_{max\,s}}{1 + \frac{1-d_o^2}{(d_o-\kappa_o)^2}} \tag{3.2.47}$$

und

$$t_{max1} = t_{max\,s} - \frac{1}{\omega_{oo}(d_o-\kappa_o)} \; . \tag{3.2.48}$$

Analog zu Gl.(3.2.36) berechnen wir als Dämpfung

$$d_1 = \frac{-\ln e_{max1}}{\sqrt{\pi^2+(\ln e_{max1})^2}} \tag{3.2.49}$$

bzw., falls das Überschwingen in Prozent gefordert wird,

$$d_1 = \frac{-\ln e_{max1} + \ln 100}{\sqrt{\pi^2+(\ln e_{max1} - \ln 100)^2}} \tag{3.2.50}$$

und als Eigenfrequenz

$$\omega_{o1} = \frac{\pi}{\sqrt{1-d_1^2}\, t_{max1}} \; . \tag{3.2.51}$$

Ein kontinuierliches PT_2S-Glied mit der im vorigen Schritt berechneten Nullstelle f_o, der Dämpfung d_1 und der Eigenfrequenz ω_{o1} erfüllt zwar die gewünschten Forderungen an die Übergangsfunktion,

aber die nach z-Transformation erhaltene Nullstelle stimmt aufgrund der Veränderung von ω_o und d nicht mehr mit β überein. Analog zu Gl. (3.2.42) kann, ausgehend von den in Gl.(3.2.50) und (3.2.51) berechneten Werten, eine neue kontinuierliche Nullstelle

$$f_1 = f_1(\omega_{o1},\ d_1,\ T)$$

$$= \frac{-\omega_{o1}\sin\omega_{o1}\sqrt{1-d_1^2}\,T\,(\beta-1)}{\left[e^{-d_1\omega_{o1}T} - 2\cos\omega_{o1}\sqrt{1-d_1^2}\,T + e^{d_1\omega_{o1}T} - \cos\omega_{o1}\sqrt{1-d_1^2}\,T(\beta-1)\right]\sqrt{1-d_1^2}}$$

$$\frac{}{-d_1\sin\omega_{o1}\sqrt{1-d_1^2}\,T\,(\beta-1) + (\beta-1)\sqrt{1-d_1^2}\;e^{\omega_{o1}d_1T}} \qquad (3.2.52)$$

berechnet werden. Die geforderten Kenngrößen werden durch die Übertragungsfunktion

$$G^1(s) = \frac{\frac{s}{f_1} + 1}{\frac{s^2}{\omega_{o1}^2} + \frac{2ds}{\omega_{o1}} + 1} \qquad (3.2.53)$$

nicht mehr erfüllt; es ist ebenso wie für Gl.(3.2.43) nur gesichert, daß die Nullstelle der z-Transformierten von Gl.(3.2.53) die Nullstelle β enthält.

Auf der Basis von f_1, d_1 und ω_{o1} lassen sich neue Werte für e_{max2} und t_{max2} für den nächsten Schritt analog zu Gl.(3.2.47) und (3.2.48) unter Verwendung von Gln.(3.2.24) und (3.2.29) berechnen. Die Forderungen an das PT_2S-Glied ohne Nullstelle für den nächsten Schritt ergeben sich mit

$$\kappa_1 = \frac{f_1}{\omega_{o1}}\ , \qquad (3.2.54)$$

$$t_{max2} = t_{max\,s} \cdot \frac{1}{\omega_{o1}} \frac{1}{d_1-\kappa_1} \qquad (3.2.55)$$

und

$$e_{max2} = \frac{e_{max\,s}}{1 + \frac{1-d_1^2}{(d_1-\kappa_1)^2}} \quad . \tag{3.2.56}$$

In allgemeiner Form ergibt sich für den i=1,...n-ten Schritt als Forderung an das PT_2S-Glied ohne Nullstelle

$$e_{max\,i} = \frac{e_{max\,s}}{1 + \frac{1 - d_{i-1}^2}{(d_{i-1} - \kappa_{i-1})^2}} \tag{3.2.57}$$

$$t_{max\,i} = t_{max\,s} - \frac{1}{\omega_{oi-1}} \frac{1}{d_{i-1} - \kappa_{i-1}} \tag{3.2.58}$$

und damit als entsprechende Dämpfung

$$d_i = \frac{-\ln e_{max\,i}}{\sqrt{\pi^2 + (\ln e_{max\,i})^2}} \tag{3.2.59}$$

bzw., falls e_{max} in Prozent festgelegt wird,

$$d_i = \frac{-\ln e_{max\,i} + \ln 100}{\sqrt{\pi^2 + (\ln e_{max\,i} - \ln 100)^2}} \quad . \tag{3.2.60}$$

Die Eigenfrequenz ω_{oi} berechnet sich

$$\omega_{oi} = \frac{\pi}{\sqrt{1-d_i^2}\; t_{max\,i}} \quad . \tag{3.2.61}$$

Die kontinuierliche Nullstelle f_i kann aus der Beziehung

$$f_i = f_i(\omega_{oi}, d_i, T) = \frac{-\omega_{oi}\sin\omega_{oi}\sqrt{1-d_i^2}\,T(\beta-1)}{\left[e^{-d_i\omega_{oi}T} - 2\cos\omega_{oi}\sqrt{1-d_i^2}\,T + e^{d_i\omega_{oi}T}\right.}$$

$$\frac{}{\left.-\cos\omega_{oi}\sqrt{1-d_i^2}\,T\,(\beta-1)\right]\sqrt{1-d_i^2} - d_i\sin\omega_{oi}\sqrt{1-d_i^2}\,T(\beta-1)}$$

$$\frac{}{+(\beta-1)\sqrt{1-d_i^2}\;e^{\omega_{oi}d_iT}} \qquad (3.2.62)$$

gewonnen werden.

Aufgrund der Verfälschungen der Übergangsfunktion ergeben sich mit

$$\kappa_i = \frac{f_i}{\omega_{oi}} \qquad (3.2.63)$$

die neuen Forderungen für den i+1 Schritt gemäß Gl.(3.2.57) und (3.2.58). Streben die Werte für d_i und ω_{oi} einem Endwert zu, so können wir eine "Konvergenz" des Algorithmus annehmen.

Die kontinuierliche Übertragungsfunktion - und damit ihre entsprechende z-Transformierte - erfüllen, falls κ genügend groß ist und damit die Näherungsformeln Gültigkeit besitzen, die gewünschten Forderungen an die Übergangsfunktion. Die z-Transformierte dieser Übertragungsfunktion enthält gleichzeitig die vorgegebene diskrete Nullstelle β.

Die Führungsübertragungsfunktion

$$G_W(z) = \frac{b_{wc} + b_{w1}z^{-1}}{1 + a_{w1}z^{-1} + a_{w2}z^{-2}}\; z^{-1} \qquad (3.2.64)$$

berechnet sich gemäß den folgenden Beziehungen:

$$a_{w1} = -2e^{-d_n \omega_{on} T} \cos \omega_{on} \sqrt{1-d_n^2}\, T \tag{3.2.65}$$

$$a_{w2} = e^{-2d_n \omega_{on} T} \tag{3.2.66}$$

$$b_{wo} = \frac{1 + a_{w1} + a_{w2}}{1-\beta} \tag{3.2.67}$$

$$b_{w1} = \frac{-\beta(1 + a_{w1} + a_{w2})}{1-\beta} \,. \tag{3.2.68}$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit soll der beschriebene Algorithmus in Form eines Flußdiagramms dargestellt werden (Bild 3.2.5).

3.2.4.3. Stabilität des Algorithmus

Zur Stabilitätsbetrachtung des Algorithmus betrachten wir die beiden im Algorithmus rekursiv berechneten Größen

$$t_{max\,i} = t_{max\,i}(t_{max\,s}, \omega_{oi-1}, d_{i-1}, \kappa_{i-1})$$

und

$$e_{max\,i} = e_{max\,i}(e_{max\,s}, e_{i-1}, \kappa_{i-1}) \,.$$

Die Beziehung für $t_{max\,i}$ gemäß Gl.(3.2.58) lautet

$$t_{max\,i} = t_{max\,s} - \frac{1}{\omega_{oi-1}} \frac{1}{d_{i-1} - \kappa_{i-1}}$$

und unter Verwendung von ω_{oi-1} gemäß Gl.(3.2.61)

$$t_{max\,i} = t_{max\,s} - \frac{\sqrt{1-d_{i-1}^2}\, t_{max\,i-1}}{\pi(d_{i-1} - \kappa_{i-1})} \,.$$

Diese zeitvariante Differenzengleichung für $t_{max\,i}$ strebt, falls

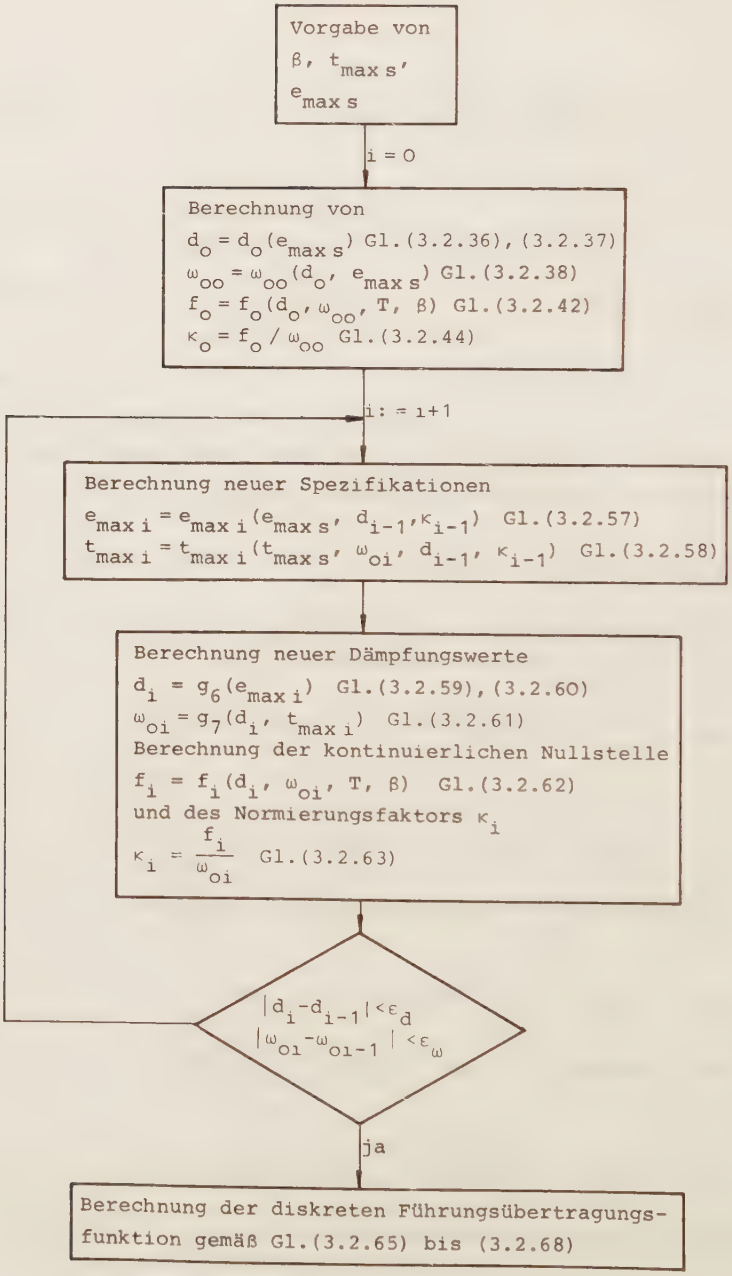

Bild 3.2.5. Flußdiagramm des Algorithmus

$$\alpha_i = \frac{\sqrt{1-d_{i-1}^2}}{\pi(d_{i-1} - \kappa_{i-1})} \tag{3.2.69}$$

betragsmäßig stets kleiner 1 ist und α_i gegen einen konstanten Wert α strebt, einem endlichen Endwert zu.

Entsprechend ergibt sich für $e_{max\,i}$ gemäß Gl.(3.2.57)

$$e_{max\,i} = \frac{e_{max\,s}}{1 + \frac{1 - d_{i-1}^2}{(d_{i-1} - \kappa_{i-1})^2}}$$

und unter Verwendung von Gl.(3.2.69)

$$e_{max\,i} = \frac{e_{max\,s}}{1 + \alpha_{i-1}^2 \pi^2} \quad . \tag{3.2.70}$$

Für den Fall, daß $\alpha_i < 1$ gilt, läßt sich $e_{max\,i}$ durch die Ungleichung

$$\frac{e_{max\,s}}{1 + \pi^2} < e_{max\,i} < e_{max\,s} \tag{3.2.71}$$

abschätzen.

Der Endwert $e_{max\,n}$ des Algorithmus läßt sich mit

$$\alpha = \lim_{i \to n} \alpha_i$$

zu

$$\lim_{i \to n} e_{max\,i} = \frac{e_{max}}{1 + \pi^2 \alpha} \tag{3.2.72}$$

berechnen. Aus Gl.(3.2.69) ist zu erkennen, daß der einzige Fall, der die Bedingung $\alpha_i < 1$ nicht mehr erfüllt, durch die Bedingung

$$d_{i-1} = \kappa_{i-1} \tag{3.2.73}$$

gegeben ist. Dieser Fall bedeutet gleichzeitig, daß $\kappa_{i-1} < 1$ ist. Falls $\kappa_{i-1} < 1$, ist der Algorithmus nicht verwendbar, da die Näherungsformeln nur für große κ bzw. $\kappa > 1$ gelten. Ist $\kappa > 1$, bereitet, wie aus Gl.(3.2.69) zu ersehen ist, die Konvergenz keine Schwierigkeiten.

Die oben aufgeführten Betrachtungen stellen sicherlich keinen vollständigen Stabilitätsbeweis dar, da es sich um zeitvariante und durch die Zusammenhänge zwischen κ_i und d_i, ω_1 stark nichtlineare Differenzengleichungen handelt.

Eine Überprüfung der Gl.(3.2.69) für α_i liefert allerdings schon bei der Berechnung des ersten Wertepaares d_o und κ_o die Möglichkeit abzuschätzen, ob mit einem Erreichen des Endwerts zu rechnen ist.

Zur Verdeutlichung der benutzten Zusammenhänge soll im folgenden Abschnitt 3.2.4.4 der Verlauf der diskreten Nullstelle in Abhängigkeit von der kontinuierlichen Nullstelle dargestellt werden. In dem Abschnitt 3.2.4.5 wird der Verlauf der kontinuierlichen Nullstelle und des Normierungsfaktors κ bei fester Dämpfung und fester diskreter Nullstelle und der Verlauf der kontinuierlichen Nullstelle bei fester Eckfrequenz ω_o und variabler Dämpfung dargestellt. Diese Funktionsverläufe bestimmen die Konvergenz des Algorithmus.

3.2.4.4. Der qualitative Verlauf der diskreten Nullstelle bei konstanter Kreisfrequenz ω_o und konstanter Dämpfung d

Der Verlauf der diskreten Nullstelle bei konstanter Dämpfung und konstanter Kreisfrequenz bestimmt sich nach Gl.(3.2.40):

$$\beta_f = 1 + \frac{e^{-2d\omega_o T} - 2e^{-d\omega_o T}\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T+1}{e^{-d\omega_o T}\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T + \frac{e^{-d\omega_o T}}{\sqrt{1-d^2}}\left(\frac{df-\omega_o}{f}\right)\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T-1}\,.$$

Die Nullstelle "springt" von der rechten Halbebene in die linke Halbebene für den Fall, daß der Nenner gleich Null wird, wie der in Bild 3.2.6 dargestellte Verlauf von β_f zeigt.

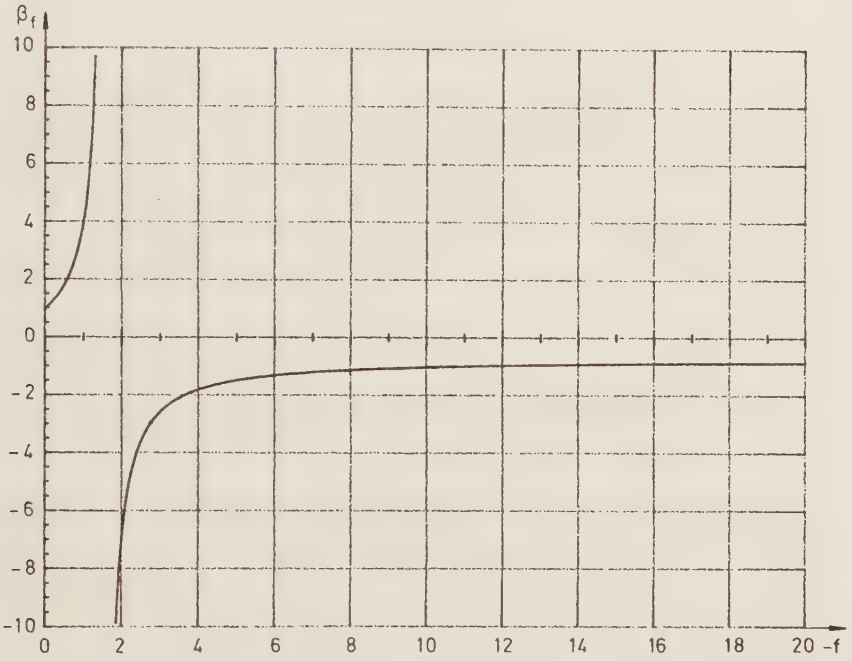

Bild 3.2.6. Verlauf der diskreten Nullstelle $s = -f$ für $\frac{\frac{s}{f}+1}{s^2+s+1}$ mit einer Abtastzeit $T = 1$

Ein typischer Verlauf der diskreten Nullstelle ist für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\frac{s}{f}+1}{s^2+s+1} \text{ mit } \omega_o = 1 \quad d = 0{,}5 \tag{3.2.74}$$

für die Abtastzeit $T = 1$ in den Bildern 3.2.6 und 3.2.7 in Abhängigkeit von -f aufgetragen. Für sehr große Werte von f nähert sich β_f dem Grenzwert β_∞

$$\beta_\infty = 1 + \frac{e^{-2d\omega_o T} - 2e^{-d\omega_o T}\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T+1}{e^{-d\omega_o T}\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T \pm \frac{e^{-d\omega_o T}}{\sqrt{1-d^2}}\,d\,\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T-1}\,.$$

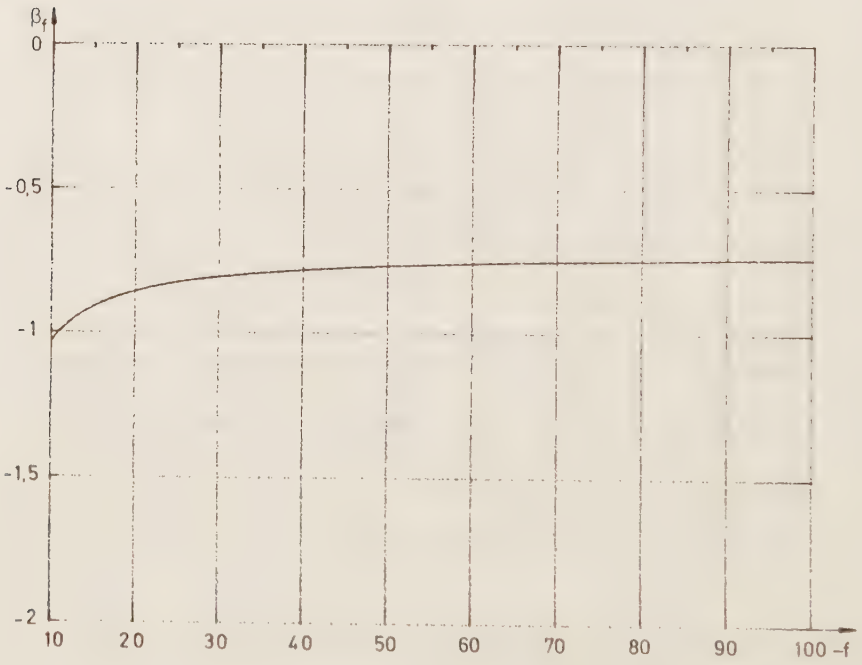

Bild 3.2.7. Verlauf der diskreten Nullstelle für $\frac{\frac{s}{f}+1}{s^2+s+1}$ mit einer Abtastzeit T = 1 für große f

3.2.4.5. Der qualitative Verlauf der kontinuierlichen Nullstelle des Normierungsfaktors κ in Abhängigkeit von der Dämpfung d und der Kreisfrequenz ω_o bei fester diskreter Nullstelle β

Im folgenden soll der Verlauf der kontinuierlichen Nullstelle und des Normierungsfaktors κ in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω_o

und der Dämpfung d anhand eines Beispiels betrachtet werden. Diese Betrachtung soll exemplarisch den Verlauf der nichtlinearen Funktion gemäß Gl.(3.2.41)

$$f = f(d, \omega_o, T, \beta) ,$$

die in dem in Kapitel 3.2.4.2 angegebenen Algorithmus Verwendung findet, darstellen. Betrachten wir die kontinuierliche Nullstelle als Parameter, so läßt sich der Algorithmus als eine Strategie beschreiben, bei der der Parameter f bzw. κ in Abhängigkeit von Dämpfung d und Kreisfrequenz ω_o solange verstellt wird, bis die gewünschten Zeitkennwerte erreicht sind. Ist nun ein einigermaßen glatter Verlauf der Funktion f bzw.

$$\kappa = g(d, \omega_o, T, \beta)$$

sichergestellt, so dürften sich auch bei dem Algorithmus keine Schwierigkeiten ergeben.

Die diskrete Nullstelle wird als vorgegeben betrachtet. Mittels Gl.(3.2.41) läßt sich die im Algorithmus berechnete kontinuierliche Nullstelle als Funktion der Eigenfrequenz ω_o bei festem d berechnen.

Zur Veranschaulichung der kontinuierlichen Nullstelle in Abhängigkeit von ω_o sollen die Bilder 3.2.8 bis 3.2.11 für $\beta = +1{,}5;\ -5;\ -1{,}1;\ -0{,}5$ dienen. Besonders auffällig ist dabei Bild 3.2.11. Die berechnete kontinuierliche Nullstelle besitzt eine Unstetigkeitsstelle. Diese Unstetigkeitsstelle tritt auf, wenn die diskrete Nullstelle exakt der diskreten Nullstelle eines PT_2S-Glieds ohne Nullstelle entspricht.

Die Abhängigkeit des Normierungsfaktors $\kappa = f/\omega_o$ von ω_o ist in den Bildern 3.2.12 bis 3.2.15 dargestellt. In diesen Bildern wurde die Größe κ nur bis zum ersten Nulldurchgang aufgezeichnet. Der erste Nulldurchgang in Abhängigkeit von ω_o und d läßt sich aus

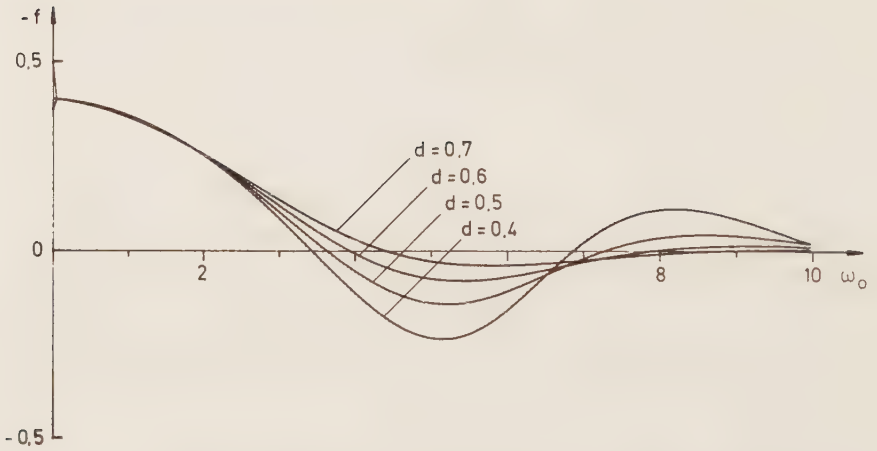

Bild 3.2.8. Verlauf der im Algorithmus berechneten kontinuierlichen Nullstelle für β = 1,5 in Abhängigkeit von ω_o für d = 0,4; 0,5; 0,6; 0,7

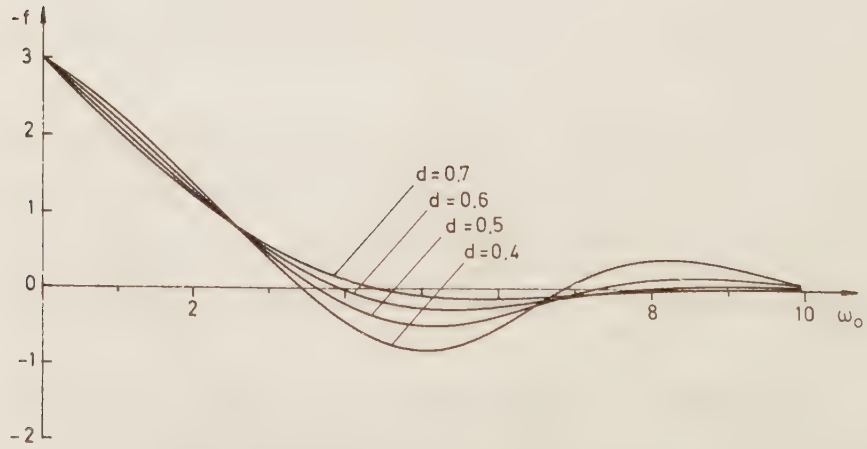

Bild 3.2.9. Verlauf der im Algorithmus berechneten kontinuierlichen Nullstelle für β = -5,0 in Abhängigkeit von ω_o für d = 0,4; 0,5; 0,6; 0,7

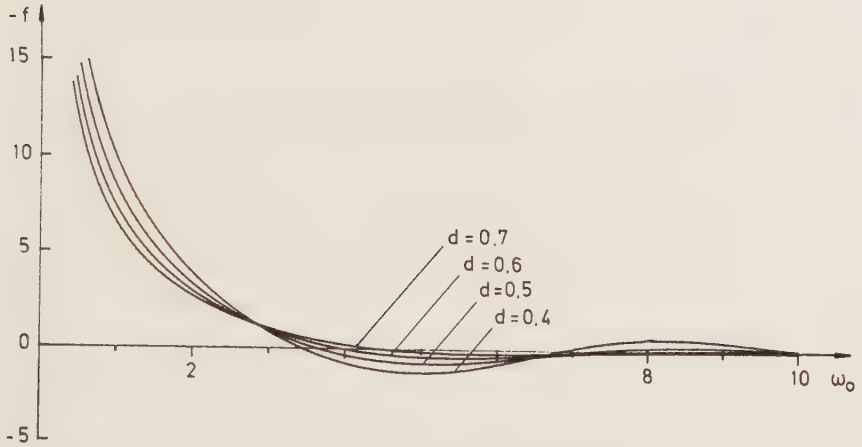

Bild 3.2.10. Verlauf der im Algorithmus berechneten kontinuierlichen Nullstelle für $\beta = -1,1$ in Abhängigkeit von ω_o für d = 0,4; 0,5; 0,6; 0,7

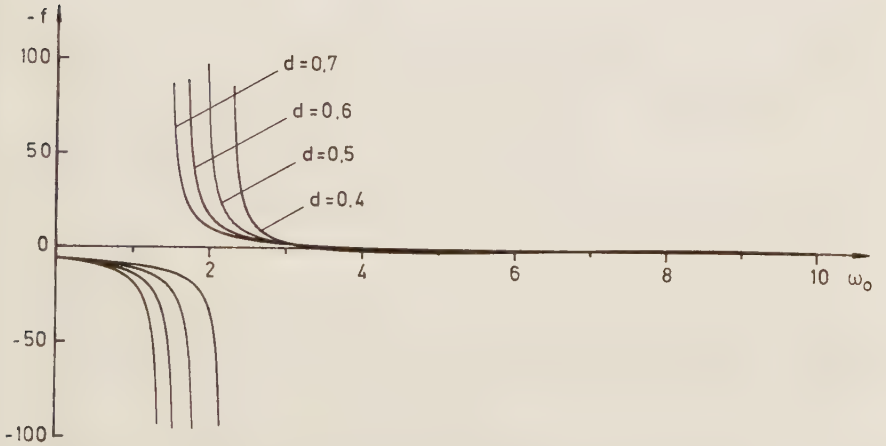

Bild 3.2.11. Verlauf der im Algorithmus berechneten kontinuierlichen Nullstelle für $\beta = -0,5$ in Abhängigkeit von ω_o für d = 0,4; 0,5; 0,6; 0,7

der mittels Gl.(3.2.41) und Gl.(3.2.11) berechneten Beziehung

$$\kappa = \frac{-\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T\,(\beta-1)}{\left[e^{-d\omega_o T} - 2\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T + e^{d\omega_o T} - \cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T\,(\beta-1)\right]\sqrt{1-d^2}}$$

$$\frac{}{-d\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\,T(\beta-1) + (\beta-1)\sqrt{1-d^2}\,e^{d\omega_o T}}$$

zu

$$\omega_o\sqrt{1-d^2}\;T = \pi$$

bestimmen. Dies bedeutet, daß der Imaginärteil des konjugiert komplexen Polpaares der halben Abtastfrequenz und damit t_{max} gemäß Gl.(3.2.17) einem Abtastschritt entspricht.

Aus den Bildern 3.2.12 bis 3.2.15 ist zu erkennen, wie die Größe von κ für einen gewünschten Wert von ω_o und damit für eine gewünschte Zeit t_{max} von der Lage der diskreten Nullstelle abhängt. Befindet sich die diskrete Nullstelle rechts oder sehr weit links vom Einheitskreis, dann entspricht das kontinuierliche PT_2S-Glied, das im Algorithmus als Zwischenschritt benutzt wird, einem PT_2S-Glied mit einer Nullstelle sehr nahe an der imaginären Achse. Für Regelstrecken mit einer sich sehr stark auswirkenden Allpaß-Eigenschaft läßt sich die gewünschte Zeit t_{max} aufgrund der Systemeigenschaft nicht beliebig verkürzen.

Der Verlauf der im Algorithmus berechneten kontinuierlichen Nullstelle ist in Abhängigkeit von d für $\omega_o = 1$ für die verschiedenen Lagen der diskreten Nullstelle für ein PT_2S-Glied in Bild 3.2.16 bis 3.2.19 dargestellt.

3.2.4.6. Drei Beispiele für die Leistungsfähigkeit des Algorithmus

1. Beispiel:

Das am Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung vorhandene Flugmodell besitzt die Übertragungsfunktion

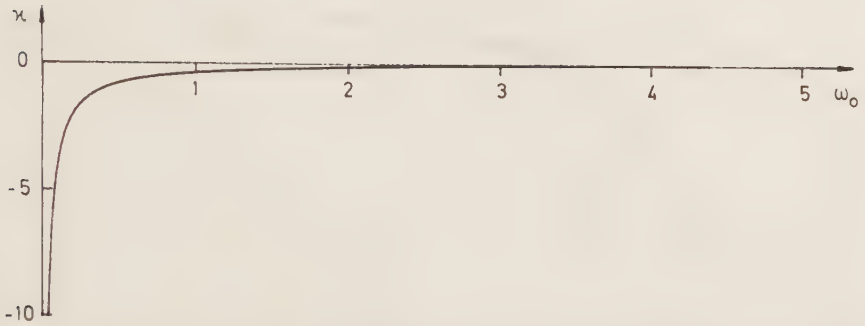

Bild 3.2.12. Verlauf des im Algorithmus berechneten Normierungsfaktors κ für β = 1,5 in Abhängigkeit von ω_o für d = 0,4; 0,5; 0,6; 0,7

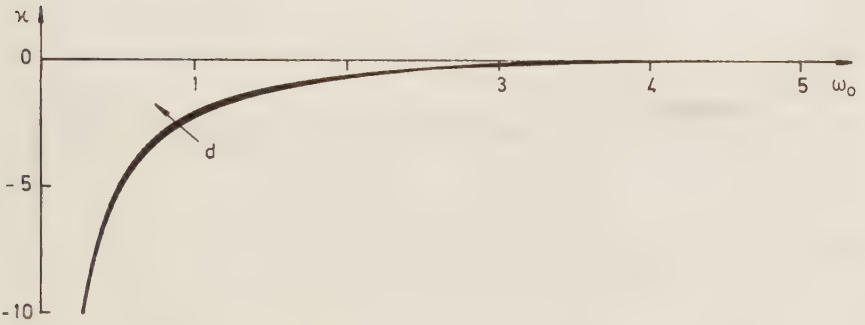

Bild 3.2.13. Verlauf des im Algorithmus berechneten Normierungsfaktors κ für β = -5,0 in Abhängigkeit von ω_o für d = 0,4; 0,5; 0,6; 0,7

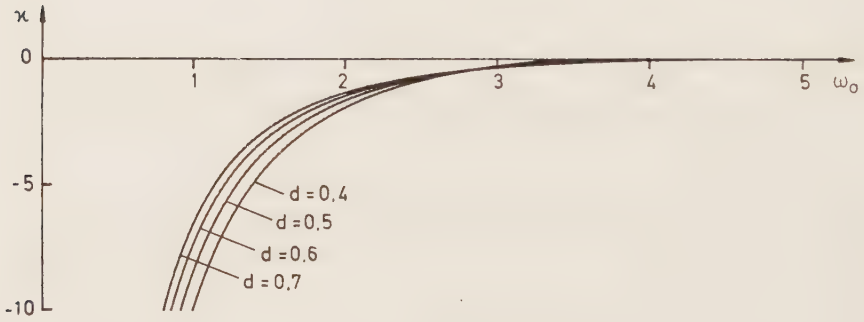

Bild 3.2.14. Verlauf des im Algorithmus berechneten Normierungsfaktors κ für $\beta = -1{,}1$ in Abhängigkeit von ω_o für d = 0,4; 0,5; 0,6; 0,7

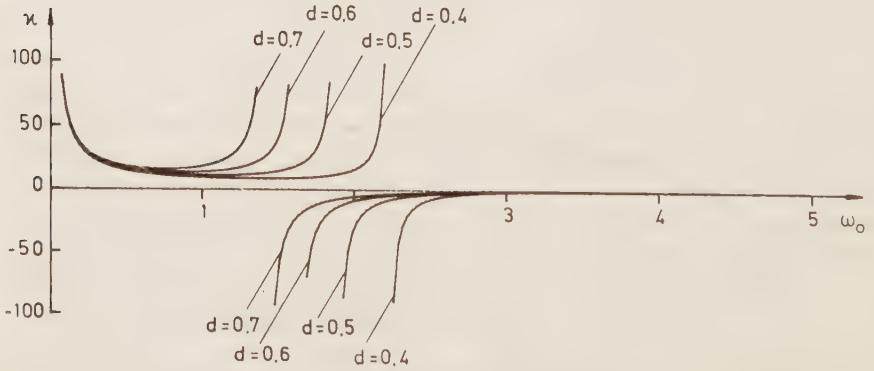

Bild 3.2.15. Verlauf des im Algorithmus berechneten Normierungsfaktors κ für $\beta = -0{,}5$ in Abhängigkeit von ω_o für d = 0,4; 0,5; 0,6; 0,7

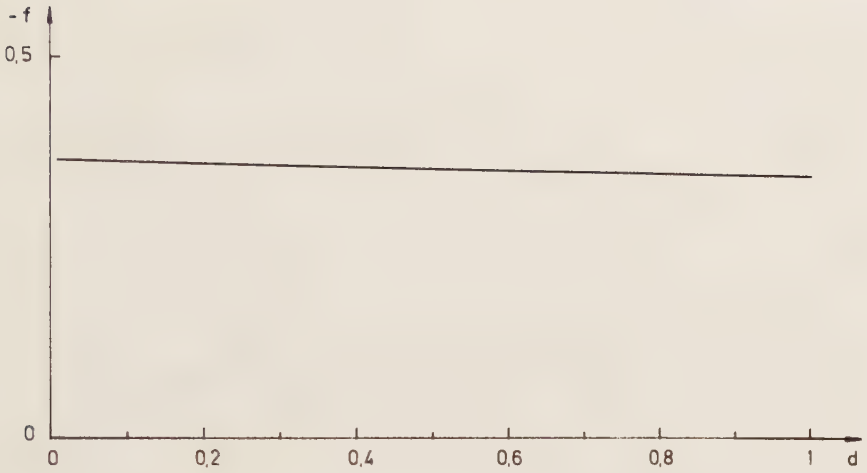

Bild 3.2.16. Verlauf der im Algorithmus berechneten kontinuierlichen Nullstelle für β = 1,5 in Abhängigkeit von d für ω_o = 1

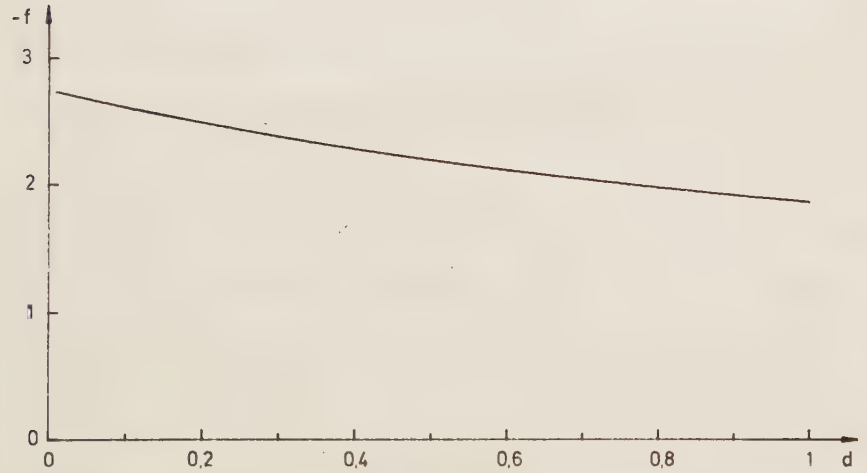

Bild 3.2.17. Verlauf der im Algorithmus berechneten kontinuierlichen Nullstelle für β = -5,0 in Abhängigkeit von d für ω_o = 1

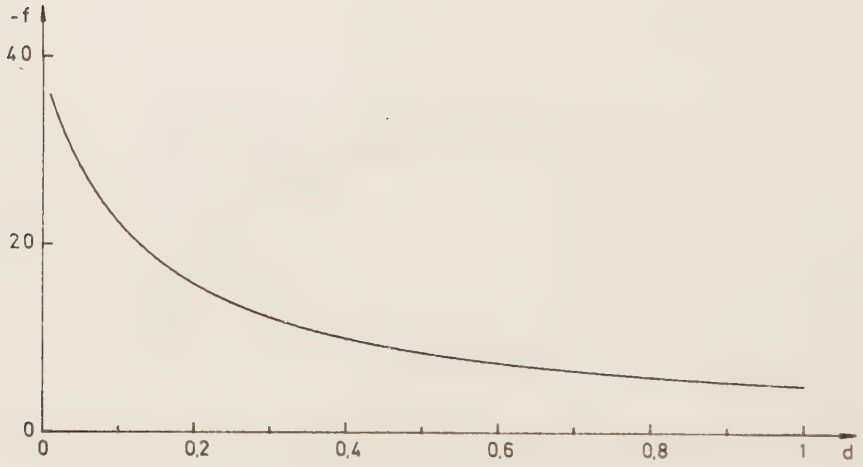

Bild 3.2.18. Verlauf der im Algorithmus berechneten kontinuierlichen Nullstelle für $\beta = -1,1$ in Abhängigkeit von d für $\omega_o = 1$

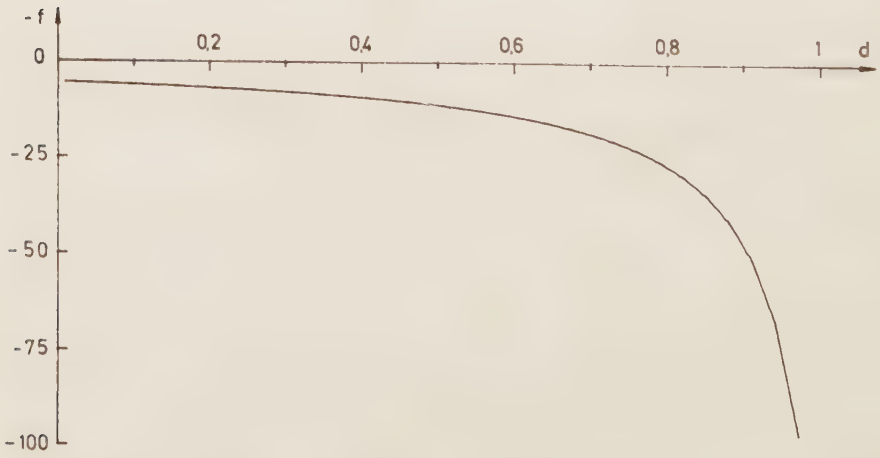

Bild 3.2.19. Verlauf der im Algorithmus berechneten kontinuierlichen Nullstelle für $\beta = -0,5$ in Abhängigkeit von d für $\omega_o = 1$

$$G_1(s) = \frac{6}{s^2(s+4)} .$$

Nach erfolgter z-Transformation für T = 1 ergibt sich als Übertragungsfunktion der Regelstrecke

$$G_1(z) = \frac{0,467 + 0,934\ z^{-1} + 0,0714\ z^{-2}}{1 - 2,018\ z^{-1} + 1,037\ z^{-2} - 0,0183\ z^{-3}}\ z^{-1} .$$

(Die Abtastzeit von T = 1 wird bei der Regelung mit anderen Kompensationsreglern wie Deadbeat-Reglern etc. ebenfalls verwendet [1].) Durch die Transformation ergibt sich im Diskreten für die im Kontinuierlichen minimalphasige Regelstrecke eine Nullstelle bei

$$\beta_1 = -1,92 ,$$

die außerhalb des Einheitskreises liegt, und eine Nullstelle

$$\beta_2 = -0,0796 .$$

Die Spezifikationen der Zeitgrößen werden zu

$$e_{max} = 7\ \% \quad \text{und} \quad t_{max} = 7$$

festgelegt. Für α_1 gemäß Gl.(3.2.69) ergibt sich 0,0299. Nach vier Iterationen erhalten wir als Modellübertragungsfunktion

$$G_{W1}(z) = \frac{0,0848 + 0,163\ z^{-1}}{1 - 1,208\ z^{-1} + 0,456\ z^{-2}}\ z^{-1} .$$

Die digitale Simulation (siehe Bild 3.2.20) liefert zum Zeitpunkt t_{max} den Wert

$$e_{max} = 6,99\ \% .$$

---

[1] Auf eine Verwendung von Zeiteinheiten wird - auch im Hinblick auf die Beispiele 2 und 3 - verzichtet.

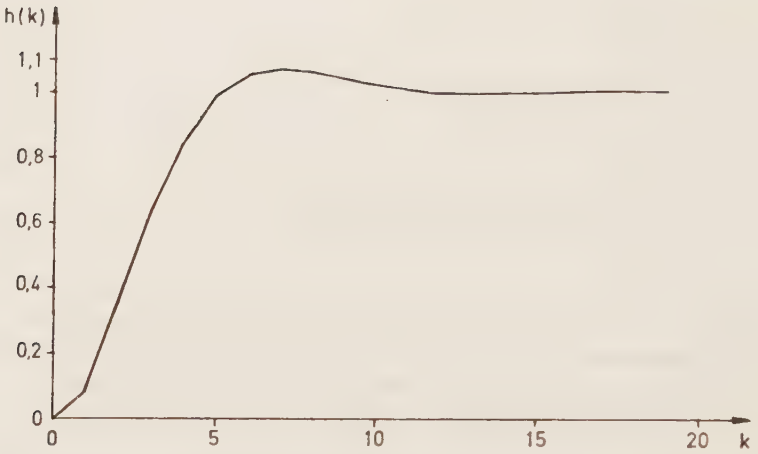

Bild 3.2.20. Modellübergangsfunktion des ersten Beispiels ($e_{max} = 7$ %, $t_{max} = 7$)

Da die Regelstrecke 3. Ordnung ist, kann die Nullstelle der Regelstrecke bei

$$z = -0{,}0796$$

durch einen Reglerpol kompensiert werden. Der Normierungsfaktor κ beträgt

$$\kappa = -7{,}152 .$$

Bei dem zweiten und dritten Beispiel soll die Übertragungsfunktion der Regelstrecke nicht betrachtet werden. Zur Bestimmung einer Modellübertragungsfunktion ist nur die Lage der diskreten Nullstelle und die Spezifikation maßgebend.

2. Beispiel:

Im zweiten Beispiel soll für eine Nullstelle sehr weit links vom Einheitskreis gezeigt werden, welchen Einfluß die vorgegebenen Zeitkennwerte auf die Genauigkeit der Modellübertragungsfunktion haben. Die diskrete Regelstrecke besitze eine Nullstelle

$$\beta = -5$$

Für die Forderungen

$$t_{max} = 3 , \quad e_{max} = 5 \%$$

ergibt sich ein α_1 von 0,125 und nach fünf Schritten die Modellübertragungsfunktion

$$G_{W21}(z) = \frac{0,1453 + 0,726\ z^{-1}}{1 - 0,217\ z^{-1} + 0,885\ z^{-2}}\ z^{-1} .$$

κ besitzt den Wert -0,846. Die Modellübergangsfunktion gemäß Bild 3.2.21 zeigt zum Zeitpunkt t_{max} ein maximales Überschwingen von 6,55 %. Dieser große Fehler resultiert aus dem sehr kleinen κ-Wert.

Verändern wir die Vorgabe für die Zeit bis zum Erreichen des maximalen Überschwingens und fordern nur noch $t_{max} = 5$, so ergibt sich die Modellübertragungsfunktion

$$G_{W22}(z) = \frac{0,0769 + 0,385\ z^{-1}}{1 - 0,806\ z^{-1} + 0,268\ z^{-2}}\ z^{-1}$$

mit $\kappa = -2,212$. Die Simulation gemäß Bild 3.2.22 liefert für den Zeitpunkt t_{max} ein Überschwingen e_{max} von 5,05 %. Die vorgegebene Spezifikation kann also wesentlich genauer erreicht werden.

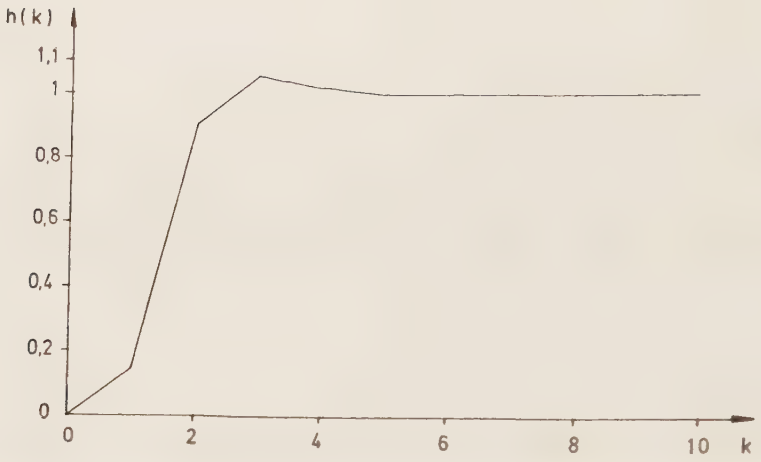

Bild 3.2.21. Modellübergangsfunktion des 2. Beispiels
(e_{max} = 5 %, t_{max} = 3)

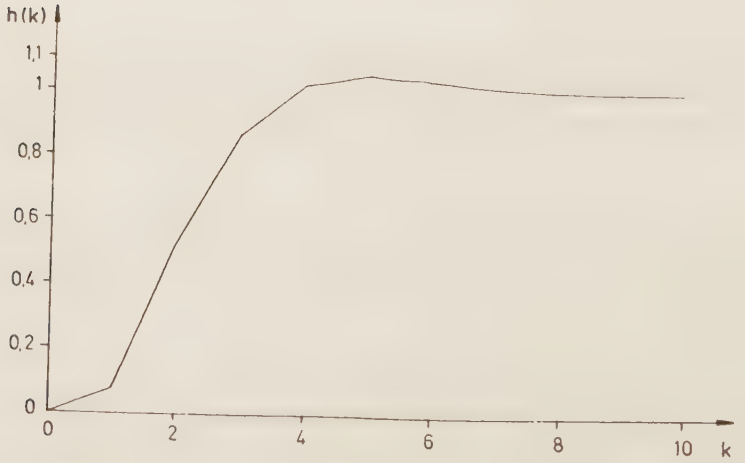

Bild 3.2.22. Modellübergangsfunktion des 2. Beispiels
(e_{max} = 5 %, t_{max} = 5)

3. Beispiel:

Im letzten Beispiel soll gezeigt werden, daß auch für diskrete Nullstellen sehr weit rechts des Einheitskreises die Möglichkeit besteht, eine passende Modellübertragungsfunktion zu entwerfen. Dabei kann allerdings nicht, wie in Kapitel 2 vorgeschlagen, der Wert des Unterschwingens direkt festgelegt werden, sondern nur indirekt durch die Zeitkenngrößen beeinflußt werden.

Für eine diskrete Regelstrecke mit einer Nullstelle

$$\beta = 5$$

wird eine Modellübertragungsfunktion mit den Spezifikationen

$$t_{max} = 3 \quad \text{und} \quad e_{max} = 5\ \%$$

gesucht. Mit

$$\alpha_1 = 0{,}206$$

ergibt sich nach sieben Iterationen die Modellübertragungsfunktion

$$G_{W31}(z) = \frac{-0{,}225 + 1{,}126\ z^{-1}}{1 - 0{,}172\ z^{-1} + 0{,}0727\ z^{-2}}\ z^{-1}$$

und ein κ-Wert von $-0{,}426$. Die digitale Simulation gemäß Bild 3.2.23 ergibt für das Überschwingen den Wert

$$e_{max} = 6{,}55\ \% .$$

Die sehr große Abweichung wird durch einen zu kleinen κ-Wert verursacht.

Der Wert des Unterschwingens zum Zeitpunkt $k = 1$ wird durch die Größe des ersten Zählerkoeffizienten ($b_0 = h(1) = -0{,}225$) festgelegt. Durch Vorgabe eines größeren Werts für t_{max} kann er beeinflußt werden.

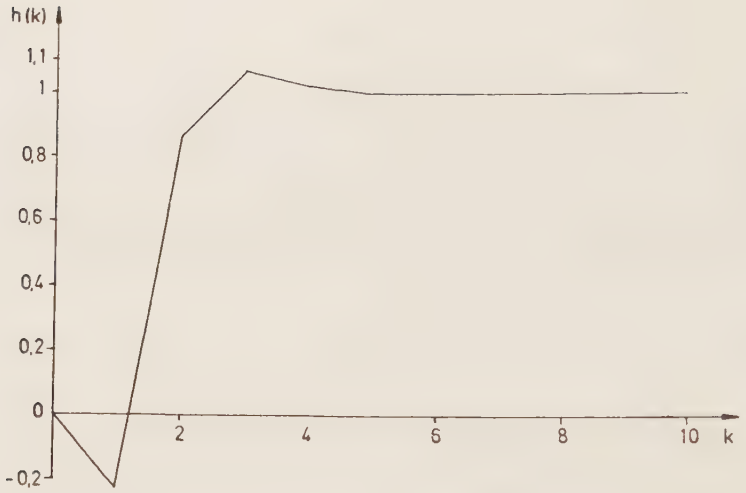

Bild 3.2.23. Modellübergangsfunktion des 3. Beispiels ($e_{max} = 5$ %, $t_{max} = 3$)

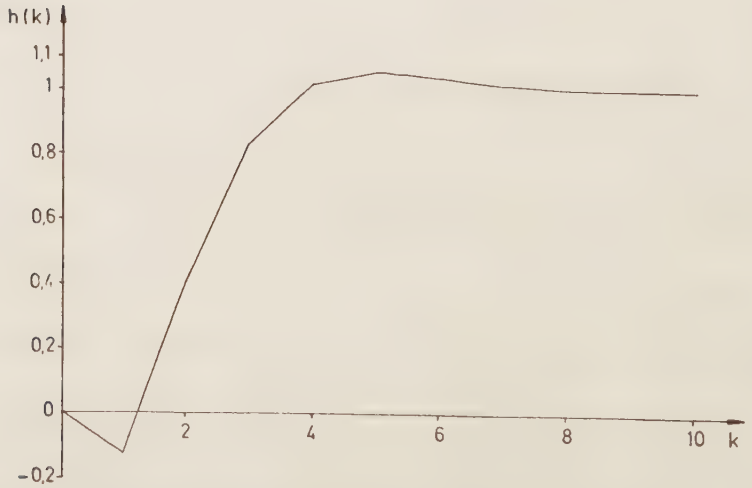

Bild 3.2.24. Modellübergangsfunktion des 3. Beispiels ($e_{max} = 5$ %, $t_{max} = 5$)

Wird die Zeit t_{max} vergrößert und

$$t_{max} = 5$$

gewählt, ergibt sich als Modellübertragungsfunktion

$$G_{W32}(z) = \frac{-0,1237 + 0,619\ z^{-1}}{1 - 0,747\ z^{-1} + 0,242\ z^{-2}}\ z^{-1}$$

mit einem κ-Wert von -1,054. Aus der Simulation gemäß Bild 3.2.24 erhalten wir ein Überschwingen von

$$e_{max} = 5,29\ \% .$$

Da der erhaltene κ-Wert immer noch sehr klein ist, bleibt der Fehler noch relativ groß.

Der Wert der Übergangsfunktion zum Zeitpunkt k = 1 hat sich allerdings auf 54 % des vorherigen Werts reduziert.

3.3. Adaptive Realisierung

Die im vorangegangenen Kapitel 2 untersuchte Regelkreisstruktur kann ohne Schwierigkeiten auf den Entwurf gemäß Abschnitt 3.1 übertragen werden. Für die Verwendung des Entwurfs im Rahmen einer ST-Regelstrategie gelten dieselben Gesichtspunkte, wie sie in Abschnitt 2.3.1 für den Entwurf für eine Regelstrecke mit einer Nullstelle rechts des Einheitskreises dargestellt wurden. Der im Abschnitt 3.2.4 vorgeschlagene Algorithmus, der es ermöglicht, auf der Basis einer Vorgabe der Zeit t_{max} bis zum Erreichen des maximalen Überschwingens, der Überschwingweite und der Kenntnis der Nullstelle der Regelstrecke, die Bestandteil der Führungsübertragungsfunktion ist, wird zu jedem Abtastzeitpunkt neu berechnet. Aufgrund der guten Konvergenz und der sehr kleinen Schrittzahl stellt dies kein Problem dar.

Zur Sicherung einer hohen Genauigkeit beim Erreichen der gewünschten Zeitspezifikationen kann zum einen eine "Konvergenzprüfung" anhand des α-Werts, also des zeitvariablen "Eigenwerts" der Differenzengleichung für t_{max}, durchgeführt werden. Bei entsprechender Lage der diskreten Nullstelle und daraus resultierendem sehr kleinen κ-Wert kann unter Umständen eine automatische Erhöhung des Wertes von t_{max} vorgesehen werden. Diese Erhöhung ist allerdings nur bei solchen Regelstrecken notwendig, bei denen ein Überschreiten der maximalen Überschwingweite zu schwerwiegenden Fehlern führt.

Für die Kombination des Entwurfs mit einem Parameterschätzverfahren und Maßnahmen gegen einen sogenannten "Estimator-Wind up" gelten auch für diesen Entwurf die bereits in Kapitel 2.3 getroffenen Aussagen.

4. Der erweiterte Self-Tuning-Regler mit Korrekturnetzwerk zur Regelung von nichtminimalphasigen Regelstrecken

4.1. Der erweiterte ST-Regler nach Clarke und Gawthrop

Für die Regelung von stochastisch gestörten Regelstrecken entwikkelten Åström und Wittenmark (1972, 1973) das Konzept des ST-Reglers. Clarke und Gawthrop (1975, 1977, 1979a,b) erweiterten den ursprünglichen ST-Regler, um die Bewertung des Führungs-, des Ausgangs- und des Stellsignals zu ermöglichen. Der ST-Regler nach Åström und Wittenmark und der erweiterte ST-Regler nach Clarke und Gawthrop sind im Anhang A.2 ausführlich dargestellt. Beim erweiterten ST-Regler wird die Stellgröße u(k) so bestimmt, daß die Vorhersage der Ausgangsgröße $\phi(k+d)$ des erweiterten Streckenmodells zu Null gesetzt wird. Das erweiterte Streckenmodell, dessen Ausgangssignal sich aus dem bewerteten Ausgang des Streckenmodells, dem bewerteten Stellsignal und dem bewerteten Führungssignal zusammensetzt, läßt sich entsprechend den Ausführungen im Anhang A.2 (siehe auch Bild A.2.5) durch das Blockschaltbild gemäß Bild 4.1.1 darstellen.

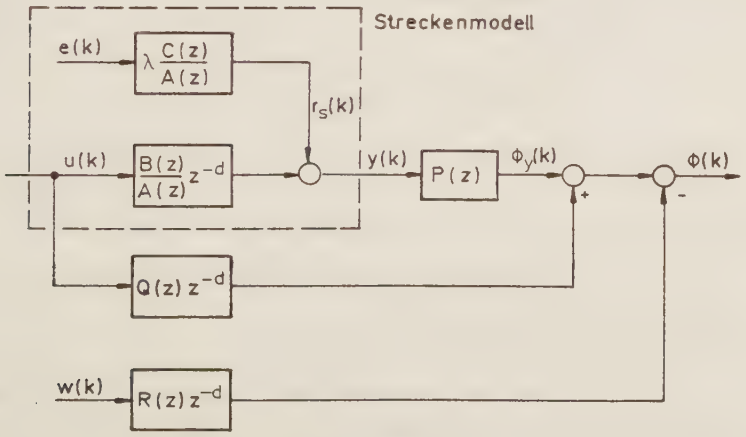

Bild 4.1.1. Erweitertes Streckenmodell nach Clarke und Gawthrop mit der Hilfsgröße ϕ

Bei den dargestellten Übertragungsfunktionen

$$P(z) = \frac{P_Z(z)}{P_N(z)} \qquad Q(z) = \frac{Q_Z(z)}{Q_N(z)} \qquad R(z) = \frac{R_Z(z)}{R_N(z)} \tag{4.1.1.}$$

handelt es sich um Übertragungsfunktionen, die die drei interessierenden Größen - Ausgangs-, Stell- und Führungssignal - bewerten.

Durch eine geschickte Wahl von Q(z) und P(z) kann bei festen Parametern der Regelstrecke die Minimalphasigkeit der erweiterten Regelstrecke gesichert werden. Entsprechend dem in Anhang A.2.5. dargestellten Blockschaltbild und der entsprechenden Beziehung Gl. (A.2.77) ergibt sich für die z-Transformation der Ausgangsgröße des geschlossenen Regelkreises:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{B(z)\ R(z) z^{-d}}{P(z)\ B(z) + Q(z)\ A(z)}\ W(z) \\ &\quad + \lambda\ \frac{F_1(z)\ B(z) + Q(z)\ C(z)}{P(z)\ B(z) + Q(z)\ A(z)}\ E(z) \\ &= \frac{B(z)\ R_Z(z)\ Q_N(z)\ P_N(z) z^{-d}}{\left[P_Z(z)\ B(z)\ Q_N(z) + Q_Z(z)\ A(z)\ P_N(z)\right] P_N(z)}\ W(z) \\ &\quad + \lambda\ \frac{\left[F_1(z)\ B(z)\ Q_N(z) + Q_Z(z)\ C(z)\right] P_N(z)}{P_Z(z)\ B(z)\ Q_N(z) + Q_Z(z)\ A(z)\ P_N(z)}\ E(z) \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

$F_1(z)$ ergibt sich aus der modifizierten "Identitätsgleichung"

$$\frac{C(z)\ P_Z(z)}{A(z)\ P_N(z)} = F_1(z) + \frac{z^{-d}\ K_1(z)}{A(z)\ P_N(z)} \tag{4.1.3}$$

mit

$$F_1(z) = 1 + f_1 z^{-1} + \ldots f_{d-1} z^{-d+1}$$

und

$$K_1(z) = k_o + k_1 z^{-1} + \ldots k_{n-1} z^{-n-n_{PN}+1} \qquad n_{PN} = \mathrm{Grad}\{P_N(z)\} \; .$$

Werden die Polynome $P_Z(z)$ $Q_N(z)$ und $Q_Z(z)$ $P_N(z)$ so gewählt, daß alle Wurzeln des charakteristischen Polynoms

$$P_Z(z)\; B(z)\; Q_N(z) + Q_Z(z)\; A(z)\; P_N(z) = 0 \qquad (4.1.4)$$

im Innern des Einheitskreises liegen, ist die Bedingung der Minimalphasigkeit für die erweiterte Regelstrecke erfüllt und der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil.

Nachteilig wirkt sich bei der Wahl von $Q_Z(z)$, $Q_N(z)$, $P_Z(z)$ und $P_N(z)$ aus, daß zur Sicherung der Minimalphasigkeit beide Übertragungsfunktionen Q(z) und P(z) Verwendung finden. Weiterhin müssen geeignete Maßnahmen für die Schätzung getroffen werden, falls P(z) während des Betriebs der ST-Regelstrategie verändert wird. Da P(z) bei der Schätzung des Prädiktors mit eingeht (siehe Anhang A.2.5), werden die Parameter der Schätzung ebenfalls mitbeeinflußt.

Der Nachteil, daß beide Übertragungsfunktionen P(z) und Q(z) notwendig sind, um die Nichtminimalphasigkeit zu beseitigen, kann vermieden werden, falls - wie im folgenden gezeigt wird - ein Korrekturnetzwerk zur Regelstrecke parallel geschaltet wird. Dabei bleiben die Möglichkeiten für die Vorgabe von P(z) und Q(z) erhalten.

4.2. Der erweiterte ST-Regler mit Korrekturnetzwerk für die Regelstrecke

4.2.1. Der Grundgedanke des Korrekturnetzwerks

Der Grundgedanke bei der Verwendung eines Korrekturnetzwerks besteht darin, zur eigentlichen Regelstrecke ein Korrekturnetzwerk parallel zu schalten. Aufgabe des Reglers ist es, nicht mehr die Regelstrecke, sondern die Parallelschaltung aus Regelstrecke und Korrekturnetzwerk zu regeln (Hahn (1980)).

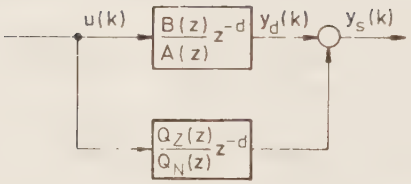

Bild 4.2.1. Regelstrecke mit Korrekturnetzwerk

Für die Übertragungsfunktion von Regelstrecke und Korrekturnetzwerk gilt:

$$\frac{Y_S(z)}{U(z)} = \frac{B(z)\ Q_N(z) + A(z)\ Q_Z(z)}{A(z)\ Q_N(z)}\ z^{-d}$$

$$= \frac{Z_P(z)}{N_P(z)}\ z^{-d}\ . \qquad (4.2.1)$$

Durch geschickte Wahl von $Q_Z(z)$ und $Q_N(z)$ kann die Minimalphasigkeit des Polynoms $Z_P(z)$ gesichert werden.

Falls eine sogenannte "statische Genauigkeit" gefordert wird, d. h.

$$\lim_{k\to\infty} y_d(k) = \lim_{k\to\infty} y_s(k) \qquad \text{für } u(k) = u_\infty\ , \qquad (4.2.2)$$

muß $Q_Z(z)$ eine Wurzel bei $z = 1$ besitzen. Damit wird gesichert, daß der Ausgang des Korrekturnetzwerks bei konstantem Eingangssignal gegen Null und damit die Ausgangsgröße y_d der eigentlichen Regelstrecke gegen den gewünschten Ausgangswert strebt.

Die Bestimmung eines Korrekturnetzwerks kann mittels der Methode der Wurzelortskurven (Fresewinkel (1981)) oder mittels der Lösung von Polynomgleichungen geschehen (siehe Abschnitt 4.2.5).

4.2.2. Das Streckenmodell mit Korrekturnetzwerk für den erweiterten ST-Regler

Ausgehend von der Grundschaltung einer Regelstrecke mit Korrekturnetzwerk (siehe Bild 4.2.1) kann - in ähnlicher Weise, wie dies Clarke und Gawthrop durchführten (vgl. Bild 4.1.1) - durch eine zusätzliche Bewertung des Führungssignals und des Ausgangssignals ein erweitertes Streckenmodell für den ST-Regler gebildet werden. Dieses erweiterte Streckenmodell ist im Bild 4.2.2 dargestellt.

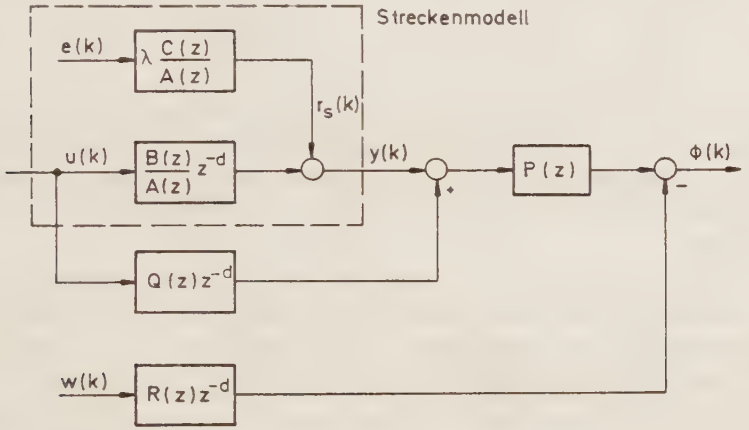

Bild 4.2.2. Regelstrecke mit Korrekturnetzwerk

Die z-Transformierte des Ausgangssignals $\phi(k)$, die die vom erweiterten ST-Regler benutzte Hilfsgröße darstellt, bestimmt sich zu

$$\phi(z) = P(z)\ Y(z) + z^{-d}Q(z)\ P(z)\ U(z) - z^{-d}R(z)\ W(z) \qquad (4.2.3)$$

oder

$$\phi(z) = P(z)\left[\lambda\frac{C(z)}{A(z)}\ E(z) + \left[\frac{B(z)}{A(z)} + Q(z)\right]z^{-d}\ U(z)\right]$$

$$- R(z)\ z^{-d}\ W(z)$$

$$\phi(z) = \frac{P_Z(z)}{P_N(z)}\left[\lambda\frac{C(z)}{A(z)}\cdot E(z) + \frac{B(z)\cdot Q_N(z) + Q_Z(z)\cdot A(z)}{A(z)\cdot Q_N(z)}\, z^{-d}\cdot U(z)\right]$$

$$- \frac{R_Z(z)}{R_N(z)}\cdot z^{-d}\cdot W(z) \quad . \qquad (4.2.4)$$

Die Bewertung des Stellsignals erfolgt im Unterschied zu Clarke und Gawthrop durch die *beiden* Übertragungsfunktionen P(z) und Q(z), also durch das Korrekturnetzwerk und die Ausgangsbewertung. Die ST-Regelstrategie wird analog zu dem von Clarke und Gawthrop vorgeschlagenen Weg bestimmt.

4.2.3. Der Reglerentwurf

Die Bestimmungsgleichung für das Stellsignal des Reglers ergibt sich aus der Forderung, daß die Vorhersage des Hilfssignals $\phi(k+d)$ auf der Grundlage der zum Zeitpunkt k vorliegenden Meßwerte gleich Null wird. In der in Anhang A.1 eingeführten Kurzschreibweise ergibt sich:

$$\phi(k+d/k) = 0 \quad . \qquad (4.2.5)$$

Bei bekannten Übertragungsfunktionen P(z), Q(z), R(z) läßt sich das Hilfssignal $\phi(k)$ gemäß Gl.(4.2.3) in drei Signale zerlegen. Zwei dieser Signale, nämlich

$$W^*(z) = R(z)\; z^{-d}\; W(z) \qquad (4.2.6)$$

und

$$U^*(z) = Q(z)\; P(z)\; z^{-d}\; U(z) \qquad (4.2.7)$$

sind zum Zeitpunkt k vollständig bekannt und damit vorhersagbar. Das dritte Signal, das durch

$$\phi_Y(z) = P(z)\; Y(z) = \frac{P_Z(z)}{P_N(z)}\; Y(z) \qquad (4.2.8)$$

beschrieben wird, ist aufgrund der stochastischen Störungen nicht vollständig vorhersagbar. Für die z-Transformierte der Vorhersage des Hilfssignals $\phi(k+d)$ zum Zeitpunkt k ergibt sich mit Gl.(4.2.3)

$$\mathcal{Z}\{\phi(k+d/k)\} = Q(z)\ P(z)\ U(z) - R(z)\ W(z) + \mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\}\ .$$

(4.2.9)

Im Blockschaltbild gemäß Bild 4.2.2 ist das Signal $\phi_y(k)$, dessen Vorhersagewert bestimmt werden muß, nicht direkt darzustellen. Nach einer Umzeichnung von Bild 4.2.2, bei der die das Ausgangssignal y bewertende Übertragungsfunktion P(z) über den Summenpunkt von stochastischem Rauschen und deterministischem Streckenausgang hinweggeschoben wird, kann $\phi_y(k)$ (siehe Bild 4.2.3) eingezeichnet werden.

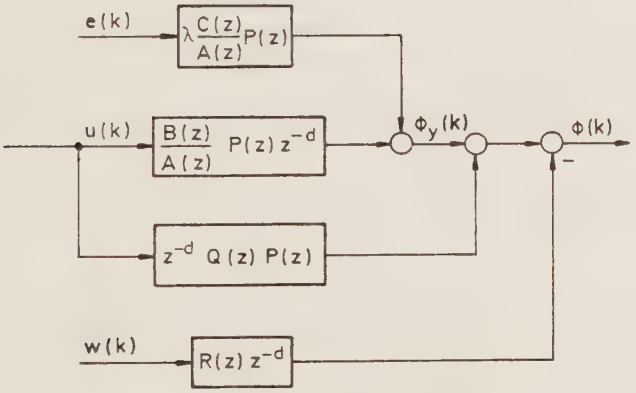

Bild 4.2.3. Umgeformtes Blockschaltbild zur Darstellung von $\phi_y(k)$

Für die z-Transformierte von $\phi_y(k+d)$ gilt gemäß Bild 4.2.3:

$$z^d\ \phi_y(z) = \lambda\ \frac{C(z)\ P_Z(z)}{A(z)\ P_N(z)}\ z^d\ E(z) + \frac{B(z)\ P_Z(z)}{A(z)\ P_N(z)}\ U(z)\ . \qquad (4.2.10)$$

Der Term, der die stochastische Störung beschreibt, kann mittels der "Identitätsgleichung" Gl.(4.1.3) zerlegt werden. Dabei wird durch den ersten Term die in der Zukunft wirksame und durch den zweiten Term die bis zum Zeitpunkt k bereits wirksame Störung beschrieben. Aus Gl.(4.2.10) folgt unter Verwendung von Gl.(4.1.3)

$$z^d\ \phi_y(z) = \lambda\ F_1(z) z^d\ E(z) + \lambda\ \frac{K_1(z)}{A(z)\ P_N(z)}\ E(z) + \frac{B(z)\ P_Z(z)}{A(z)\ P_N(z)}\ U(z)\ .$$

(4.2.11)

Der vorhersagbare Anteil des Signals $\phi_y(k+d)$ ergibt sich mit

$$E\{\mathcal{Z}^{-1}\{\lambda F_1(z)\ E(z)\}\} = 0$$

zu:

$$\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\} = \lambda \frac{K_1(z)}{A(z)\ P_N(z)} E(z) + \frac{B(z)\ P_Z(z)}{A(z)\ P_N(z)} U(z) \quad . \qquad (4.2.12)$$

Das nicht meßbare Signal E(z) in Gl.(4.2.12) kann mittels Gl. (4.2.10) in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\lambda E(z) = \frac{A(z)\ P_N(z)}{C(z)\ P_Z(z)} \phi_y(z) - \frac{B(z)}{C(z)} z^{-d} U(z) \quad . \qquad (4.2.13)$$

Die z-Transformierte des vorhersagbaren Anteils von $\phi_y(k+d)$ ergibt sich mit den Gln.(4.2.12) und (4.2.13) zu:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\} &= \frac{K_1(z)}{A(z)\ P_N(z)} \left[\frac{A(z)\ P_N(z)}{C(z)\ P_Z(z)} \phi_y(z) - \frac{B(z)}{C(z)} z^{-d} U(z)\right] \\ &\quad + \frac{B(z)\ P_Z(z)}{A(z)\ P_N(z)} U(z) \\ &= \frac{K_1(z)}{C(z)\ P_Z(z)} \phi_y(z) \\ &\quad - \frac{B(z)}{A(z)\ P_N(z)} \left[\frac{K_1(z) z^{-d} - P_Z(z)\ C(z)}{C(z)}\right] U(z)\end{aligned} \qquad (4.2.14)$$

und nach erneuter Anwendung der "Identitätsgleichung" Gl.(4.1.3) zu:

$$\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\} = \frac{K_1(z)}{C(z)\ P_Z(z)}\ \phi_y(z) + \frac{B(z)\ A(z)\ P_N(z)\ F_1(z)}{A(z)\ P_N(z)\ C(z)}\ U(z)$$

$$= \frac{K_1(z)}{C(z)\ P_Z(z)}\ \phi_y(z) + \frac{B(z)\ F_1(z)}{C(z)}\ U(z)\ . \qquad (4.2.15)$$

Wird der Zusammenhang zwischen $\phi_y(z)$ und $Y(z)$ gemäß Gl.(4.2.8) benutzt, dann ergibt sich für den Vorhersagewert $\phi_y(k+d/k)$:

$$\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\} = \frac{K_1(z)}{C(z)\ P_N(z)}\ Y(z) + \frac{B(z)\ F_1(z)}{C(z)}\ U(z)\ . \qquad (4.2.16)$$

Das vorhergesagte Hilfsausgangssignal $\phi(k+d/k)$ des erweiterten Streckenmodells gemäß Bild 4.2.2 bzw. 4.2.3 läßt sich gemäß Gl. (4.2.9) unter Verwendung von Gl.(4.2.15) mit

$$\mathcal{Z}\{\phi(k+d/k)\} = \frac{K_1(z)}{C(z)\ P_Z(z)}\ \phi_y(z) + \frac{B(z)\ F_1(z)}{C(z)}\ U(z)$$

$$+ Q(z)\ P(z)\ U(z) - R(z)\ W(z) \qquad (4.2.17)$$

oder unter Verwendung des Signals y gemäß Gl.(4.2.16)

$$\mathcal{Z}\{\phi(k+d/k)\} = \frac{K_1(z)}{C(z)\ P_N(z)}\ Y(z) + \frac{B(z)\ F_1(z)}{C(z)}\ U(z)$$

$$+ Q(z)\ P(z)\ U(z) - R(z)\ W(z) \qquad (4.2.18)$$

beschreiben. Das Stellsignal u(k) wird so gewählt, daß die Vorhersage der Hilfsgröße $\phi(k+d)$ Null wird. Damit lautet die Bestimmungsgleichung für U(z):

$$\mathcal{Z}\{\phi(k+d/k)\} = \frac{K_1(z)}{P_N(z)\ C(z)}\ Y(z) + \frac{B(z)\ F_1(z)}{C(z)}\ U(z)$$

$$+ Q(z)\ P(z)\ U(z) - R(z)\ W(z) \stackrel{!}{=} 0\ , \qquad (4.2.19)$$

bzw. nach U(z) umgeformt:

$$U(z) = \frac{C(z)\ R(z)\ W(z) - \frac{K_1(z)}{P_N(z)}\ Y(z)}{B(z)\ F_1(z) + C(z)\ Q(z)\ P(z)} \qquad (4.2.20)$$

oder unter Benutzung von Gl.(4.2.16) und (4.2.17):

$$U(z) = \frac{R(z)\ W(z) - \mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\}}{Q(z)\ P(z)} \ . \qquad (4.2.21)$$

Clarke und Gawthrop (1979a) schlugen vor, um eine von der Schätzung unabhängige Bewertung der Stellgröße zu ermöglichen, das Stellsignal u(k) in zwei Schritten zu bestimmen. Das Stellsignal u(k), in das die Stellbewertung nicht eingeht, berechnet sich aus der Bedingung

$$\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\} - R(z)\ W(z) \stackrel{!}{=} 0 \ . \qquad (4.2.22)$$

Wird die Bedingung gemäß Gl.(4.2.22) im Zeitbereich dargestellt, so ergibt sich mit Gl.(4.2.16)

$$\mathcal{Z}^{-1}\{R(z)\ W(z)\} - \phi_y(k+d/k) = \mathcal{Z}^{-1}\{R(z)\ W(z)\} - \mathcal{Z}^{-1}\{\frac{K_1(z)}{C(z)\ P_N(z)}\ Y(z)\}$$

$$-\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{B(z)\ F_1(z)}{C(z)}\ U(z)\} \qquad (4.2.23)$$

oder unter Verwendung der Abkürzung

$$w'(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{R(z)\ W(z)\}$$

$$w'(k) - \phi_y(k+d/k) = \Big[w'(k) - \mathcal{Z}^{-1}\{\frac{K_1(z)}{C(z)\ P_N(z)}\ Y(z)\}$$

$$- \mathcal{Z}^{-1}\{(\frac{B(z)\ F_1(z)}{C(z)} - b_o)\ U(z)\}\Big] - b_o\, u(k) \ . \qquad (4.2.24)$$

Wird das Signal, das die eckige Klammer aufhebt, mit $b_o\ u'(k)$ bezeichnet, dann ergibt sich für die Gl.(4.2.24)

$$w'(k) - \phi_y(k+d/k) = -b_o\ u(k) + b_o\ u'(k)\ . \qquad (4.2.25)$$

Transformieren wir diese Beziehung und setzen sie in Gl.(4.2.21) als Zähler ein, dann erhalten wir

$$U(z) = \frac{+b_o U'(z) - b_o\ U(z)}{Q(z)\ P(z)} \qquad (4.2.26)$$

und als Beziehung zwischen u'(k) und u(k)

$$U(z) = \frac{1}{1 + \frac{Q(z)\ P(z)}{b_o}}\ U'(z)\ . \qquad (4.2.27)$$

(Der Koeffizient b_o wird durch Abspaltung gewonnen und ist der erste Koeffizient des Polynoms B(z) F(z).)

Der Vorteil dieser zweistufigen Berechnung von u'(k) und u(k) liegt darin, daß durch die Verstellung von Q(z) die anderen Reglerparameter nicht beeinflußt werden. Dieser Vorteil ist allerdings nur dann gesichert, wenn die Bewertungspolynome fest vorgegeben sind.

4.2.4. Der geschlossene Regelkreis

Die im Abschnitt 4.2.3 entwickelten Beziehungen für den Regler lassen sich in einem Blockschaltbild darstellen. Einige der dabei vorkommenden Blöcke sind dabei nicht kausal, während der gesamte Regelkreis wieder kausal ist. Der Regelkreis ergibt sich unter Verwendung von Gl.(4.2.9) und der aus den Gln.(4.2.11) und (4.2.12) erhaltenen Ausdrücke und

$$\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d)\} = \mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\} + \lambda F_1(z)\ E(z)$$

in der im Bild 4.2.4 dargestellten Form, wobei der Term $\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d)\}$ anhand von Gl.(4.2.10) und der Term $\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)$ anhand von Gl.(4.2.21) realisiert werden.

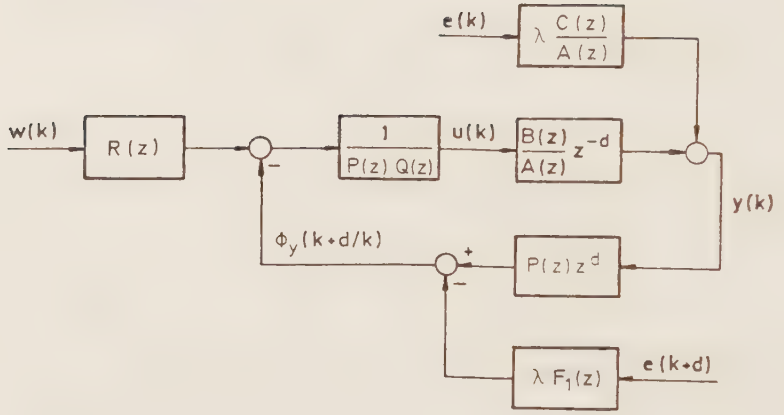

Bild 4.2.4. Blockschaltbild der Regelung

Zur Bestimmung der charakteristischen Gleichung wird das Blockschaltbild von Bild 4.2.4 in zwei Teilschritten, die in den Bildern 4.2.5 und 4.2.6 dargestellt sind, umgeformt.

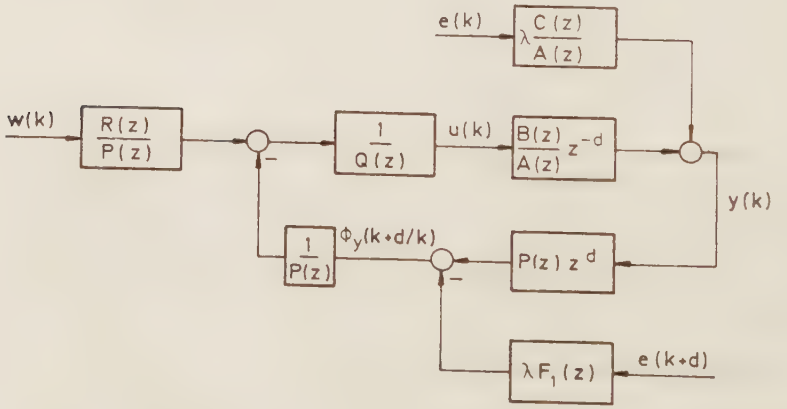

Bild 4.2.5. Blockschaltbild nach der ersten Umformung

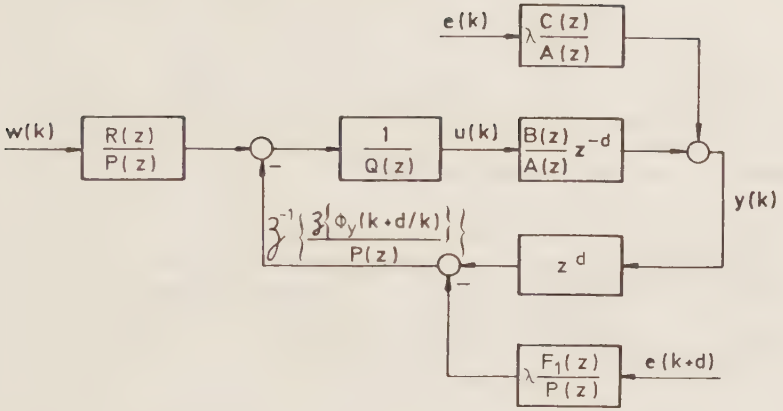

Bild 4.2.6. Blockschaltbild nach der zweiten Umformung

Der Vorteil der in Abschnitt 4.2.2 vorgeschlagenen Struktur zeigt sich deutlich in Bild 4.2.6. Im Unterschied zu dem erweiterten ST-Regler nach Gawthrop geht die Bewertung der Regelgröße y durch die Übertragungsfunktion P(z) nicht in die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises ein. Damit kann P(z) weitgehend unabhängig gewählt werden.

Für die Ausgangsgröße des geschlossenen Regelkreises ergibt sich gemäß Bild 4.2.6:

$$Y(z) = \frac{1}{\frac{B(z)}{A(z)}\,\frac{1}{Q(z)} + 1}\left[\frac{B(z)R(z)\,z^{-d}}{A(z)Q(z)P(z)}\,W(z) + \left(\frac{C(z)}{A(z)} + \frac{F_1(z)B(z)}{A(z)Q(z)P(z)}\right)\lambda E(z)\right]$$

$$= \frac{1}{\frac{B(z)}{A(z)Q(z)} + 1}\left[\frac{B(z)\,R(z)\,z^{-d}}{A(z)Q(z)P(z)}\,W(z) + \frac{C(z)P(z)Q(z) + F_1(z)B(z)}{A(z)Q(z)P(z)}\,\lambda E(z)\right]$$

$$= \frac{1}{B(z) + A(z)Q(z)} \left[\frac{B(z)R(z)z^{-d}}{P(z)} W(z) + \frac{C(z)P(z)Q(z) + F_1(z)B(z)}{P(z)} \lambda E(z) \right]$$

$$= \frac{B(z)R(z)z^{-d}}{[B(z) + A(z)Q(z)]P(z)} W(z) + \frac{C(z)P(z)Q(z) + F_1(z)B(z)}{[B(z) + A(z)Q(z)]P(z)} \lambda E(z) .$$

Unter Verwendung der Beziehungen gemäß Gl.(4.1.1) für $Q(z)$, $P(z)$ und $R(z)$ ergibt sich:

$$Y(z) = \frac{B(z)R_Z(z)Q_N(z)P_N(z)\, z^{-d}}{[B(z)Q_N(z) + A(z)Q_Z(z)]R_N(z)P_Z(z)} W(z)$$

$$+ \frac{C(z)P_Z(z)Q_Z(z) + F_1(z)B(z)P_N(z)Q_N(z)}{[B(z)Q_N(z) + A(z)Q_Z(z)]P_Z(z)} \lambda E(z) . \qquad (4.2.28)$$

Für das Stellsignal ergibt sich

$$U(z) = \frac{1}{\frac{B(z)}{A(z)Q(z)} + 1} \left[\frac{R(z)}{P(z)Q(z)} W(z) - \frac{C(z)}{A(z)} \frac{z^d}{Q(z)} \lambda E(z) + \frac{F_1(z)z^d}{P(z)Q(z)} \lambda E(z) \right]$$

$$= \frac{1}{(\frac{B(z)}{A(z)Q(z)} + 1)Q(z)} \left[\frac{R(z)}{P(z)} W(z) - z^d \left(\frac{C(z)}{A(z)} - \frac{F_1(z)}{P(z)}\right) \lambda E(z) \right]$$

und unter Verwendung der "Identitätsgleichung" Gl.(4.1.3)

$$U(z) = \frac{1}{B(z) + A(z)Q(z)} \left[\frac{R(z)A(z)}{P(z)} W(z) - \frac{K_1(z)}{P_Z(z)} \lambda E(z) \right]$$

$$= \frac{R(z)A(z)}{[B(z) + A(z)Q(z)]P(z)} W(z) - \frac{K_1(z)}{[B(z) + A(z)Q(z)]P_Z(z)} \lambda E(z)$$

$$= \frac{R_Z(z)A(z)P_N(z)Q_N(z)}{[Q_N(z)B(z) + A(z)Q_Z(z)]P_Z(z)R_N(z)} W(z)$$

$$- \frac{K_1(z)Q_N(z)}{[Q_N(z)B(z) + A(z)Q_Z(z)]P_Z(z)} \lambda E(z) \qquad (4.2.29)$$

4.2.5. Die charakteristische Gleichung des Regelkreises und der Entwurf des Korrekturnetzwerks

Gemäß Gl.(4.2.28) und (4.2.29) ergibt sich als charakteristische Gleichung des Regelkreises

$$B(z)\ Q_N(z) + A(z)\ Q_Z(z) = 0\,. \tag{4.2.30}$$

Aus der Regelkreisstruktur (siehe Bild 4.2.6) ist zu erkennen, daß zur Sicherung der statischen Genauigkeit ein Integralanteil in $1/Q(z)$ vorhanden sein muß. Führen wir einen zusätzlichen Verstärkungsfaktor $K' = 1/K^*$ für $Q(z)$ ein, so ergibt sich für $Q(z)$:

$$\begin{aligned} Q(z) &= K'\ Q'(z) \\ &= K'\ \frac{Q_Z'(z)}{Q_N(z)} \\ &= \frac{1}{K^*}\ \frac{Q_Z'(z)}{Q_N(z)} \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

Für die charakteristische Gleichung ergibt sich dann gemäß Gl. (4.2.30) und

$$K^*B(z)\ Q_N(z) + A(z)\ Q_Z'(z) = 0 \tag{4.2.32}$$

oder, falls $Q_Z'(z)$ eine Wurzel bei $z = 1$ enthält, d. h. $Q_Z'(z) = (1-z^{-1})Q_Z''(z)$

$$K^*B(z)\ Q_N(z) + A(z)\ Q_Z''(z)(1-z^{-1}) = 0\,. \tag{4.2.33}$$

Der Entwurf des Korrekturnetzwerks kann mittels zweier verschiedener Methoden erfolgen.

Falls die Lage der Pole und Nullstellen und ihre maximalen Schwankungen abgeschätzt werden können, kann das Korrekturnetzwerk mit den Methoden der Wurzelortskurven entworfen werden. Dabei kommt es

wesentlich darauf an, daß die Wurzelortskurve des charakteristischen Polynoms den Einheitskreis möglichst wenig verläßt. Mittels des Vorfaktors K^* kann eine bestimmte Lage der Wurzeln auf den Wurzelortskurven erzwungen werden. K^* sollte dabei so gewählt werden, daß die Wurzeln trotz Parameterschwankungen stets im Einheitskreis verbleiben. Eine ausführliche Untersuchung der Probleme bei der Wahl des Korrekturnetzwerks ist bei Hahn (1980) und Fresewinkel (1981) zu finden.

Eine zweite Möglichkeit zur Festlegung des Korrekturnetzwerks besteht darin, Gl.(4.2.30) als eine Polynom-Gleichung zu betrachten. Diese Gleichung kann, falls A(z) und B(z) bekannt sind, mittels ähnlicher Methoden, wie sie in Abschnitt 2.2 vorgestellt wurden, gelöst werden.

Bezeichnen wir das gewünschte charakteristische Polynom mit $G_C(z)$, so gilt mit Gl.(4.2.30)

$$B(z)\ Q_N(z) + A(z)\ Q_Z(z) = G_C(z)\,. \tag{4.2.34}$$

Als Minimalbedingung für $Q_N(z)$ erhalten wir

$$\mathrm{Grad}\{Q_N\} \geq \mathrm{Grad}\{A\} \tag{4.2.35}$$

und als Minimalbedingung für $Q_Z(z)$:

$$\mathrm{Grad}\{Q_Z\} \geq \mathrm{Grad}\{B\}\,. \tag{4.2.36}$$

Falls der Grad von $G_C(z)$ kleiner als der Grad von $B(z)\ Q_N(z)$ und $A(z)\ Q_Z(z)$ gewählt wird, sind zur Bestimmung der

$$n_u = \mathrm{Grad}\{Q_Z\} + \mathrm{Grad}\{Q_N\} + 1 \tag{4.2.37}$$

Unbekannten

$$n_1 = \mathrm{Grad}\{B\} + \mathrm{Grad}\{Q_N\}$$

oder

$$n_2 = \text{Grad}\{A\} + \text{Grad}\{Q_Z\}$$

Gleichungen vorhanden. Aus der Bedingung

$$n_1 = n_u$$

ergibt sich

$$\text{Grad}\{B\} + \text{Grad}\{Q_N\} + 1 = \text{Grad}\{Q_N\} + \text{Grad}\{Q_Z\} + 1 \qquad (4.2.38)$$

oder

$$\text{Grad}\{Q_Z\} = \text{Grad}\{B\} \; . \qquad (4.2.39)$$

Aus der Bedingung

$$n_2 = n_u$$

folgt

$$\text{Grad}\{A\} + \text{Grad}\{Q_Z\} + 1 = \text{Grad}\{Q_N\} + \text{Grad}\{Q_Z\} + 1 \qquad (4.2.40)$$

und damit

$$\text{Grad}\{Q_N\} = \text{Grad}\{A\} \; . \qquad (4.2.41)$$

Eine Erhöhung des Grades von $Q_Z(z)$ bzw. von $Q_N(z)$ ist möglich. Es ergeben sich dadurch zusätzliche Freiheitsgrade, die z. B. dazu benutzt werden können, einen Integralanteil in $1/Q(z)$ vorzusehen.

Für den Fall eines mehrfachen (ν-fachen) Integrators verändert sich Gl.(4.2.34) wie folgt:

$$B(z)\; Q_N(z) + A(z)\; Q_Z''(z)(1-z^{-1})^{\nu} = G_C(z) \; . \qquad (4.2.42)$$

Zur Berechnung eines geeigneten Korrekturnetzwerks mittels der Polynomgleichung (4.2.42) wird $G_C(z)$, das charakteristische Polynom des Regelkreises, vorgegeben. Mittels eines Koeffizienten-

vergleichs werden die unbekannten Koeffizienten der beiden Polynome $Q_Z(z)$ und $Q_N(z)$ berechnet. Dabei kann entweder der Grad von $Q_N(z)$ gemäß Gl.(4.2.35) oder der Grad von $Q_Z(z)$ gemäß Gl.(4.2.36) festgelegt werden. Zur Sicherung der eindeutigen Lösbarkeit muß der Koeffizientenvergleich dieselbe Anzahl von Gleichungen ergeben, wie unbekannte Koeffizienten vorhanden sind.

Der jeweils notwendige Grad von $Q_Z(z)$ bei der Vorgabe des Grads von $Q_N(z)$ und der Grad von $Q_N(z)$ bei der Vorgabe von $Q_Z(z)$ sollen im folgenden dargestellt werden.

Aus Gl.(4.2.42) kann ersehen werden, daß G_C maximal den Grad von $B(z)\ Q_N(z)$ oder von $A(z)\ Q_Z''(z)(1-z^{-1})^{\nu}$ besitzen darf. Wird der Grad von $G_C(z)$ kleiner als der Grad beider Terme der linken Seite gewählt, muß

$$\text{Grad}\{B\} + \text{Grad}\{Q_N\} = \text{Grad}\{Q_Z''\} + \nu + \text{Grad}\{A\} \qquad (4.2.43)$$

gelten.

Wird der Grad von $Q_Z(z)$ zu

$$\text{Grad}\{Q_Z\} = \text{Grad}\{Q_Z''\} + \nu = \text{Grad}\{B\} + \nu \qquad (4.2.44)$$

festgelegt und ν Koeffizienten oder Wurzeln von $Q_Z(z)$ oder $Q_N(z)$ vorgegeben, so lassen sich die unbekannten Koeffizienten, deren Anzahl durch

$$\begin{aligned}\text{Grad}\{Q_N\} + \text{Grad}\{Q_Z\} + 1 - \nu &= \text{Grad}\{Q_N\} + \text{Grad}\{Q_Z''\} + 1 \\ &= \text{Grad}\{Q_N\} + \text{Grad}\{B\} + 1 \qquad (4.2.45)\end{aligned}$$

gegeben ist, eindeutig bestimmen, falls

$$\begin{aligned}\text{Grad}\{Q_N\} + \text{Grad}\{B\} + 1 &= \max\{\text{Grad}\{G_C\} + 1;\ \text{Grad}\{A\} + \text{Grad}\{Q_Z''\} + \nu + 1\} \\ &= \max\{\text{Grad}\{G_C\} + 1;\ \text{Grad}\{A\} + \text{Grad}\{B\} + \nu + 1\} \\ &\qquad (4.2.46)\end{aligned}$$

gilt.

Damit ergibt sich für den Grad von $Q_N(z)$

$$\text{Grad}\{Q_N\} = \max\{\text{Grad}\{G_C\} - \text{Grad}\{B\};\ \text{Grad}\{A\} + \nu\} \ . \qquad (4.2.47)$$

Wird der Grad von $Q_N(z)$ zu

$$\text{Grad}\{Q_N\} = \text{Grad}\{A\} + \nu \qquad (4.2.48)$$

festgelegt und ν Koeffizienten oder Wurzeln von $Q_Z(z)$ oder $Q_N(z)$ vorgegeben, so lassen sich die unbekannten Koeffizienten, deren Anzahl analog zu Gl.(4.2.45) durch

$$\text{Grad}\{Q_N\} + \text{Grad}\{Q_Z\} + 1 - \nu = \text{Grad}\{A\} + \nu + \text{Grad}\{Q_Z\} + 1 - \nu \qquad (4.2.49)$$

gegeben ist, eindeutig bestimmen, falls

$$\text{Grad}\{Q_Z\} + \text{Grad}\{A\} + 1 = \max\{\text{Grad}\{G_C\} + 1;\ \text{Grad}\{B\} + \text{Grad}\{Q_N\} + 1\}$$

$$= \max\{\text{Grad}\{G_C\} + 1;\ \text{Grad}\{B\} + \text{Grad}\{A\} + \nu + 1\} \qquad (4.2.50)$$

erfüllt ist.

Der Grad von $Q_Z(z)$ bestimmt sich dann zu

$$\text{Grad}\{Q_Z\} = \max\{\text{Grad}\{G_C\} - \text{Grad}\{A\};\ \text{Grad}\{B\} + \nu\}. \qquad (4.2.51)$$

Die Verwendung der Polynomgleichung gemäß Gl.(4.2.30) setzt allerdings die Kenntnis der Polynome A(z) und B(z) voraus. Falls Schätzungen der beiden Polynome bekannt sind, kann die Polynomgleichung sehr gut zur Berechnung eines geeigneten Kompensationsnetzwerks benutzt werden. Dies ist vor allem bei Regelstrecken höherer Ordnung von Vorteil, für die mit der Methode der Wurzelortskurven nur sehr schwer Kompensationsnetzwerke gefunden werden können.

Für das Zählerpolynom der Störübertragungsfunktion gemäß Gl.(4.2.28) kann ein ähnlicher Weg eingeschlagen werden. Er soll im folgenden erläutert werden.

4.2.6. Die Festlegung der Störübertragungsfunktion

Gemäß Gl.(4.2.28) ergibt sich für die Störübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \lambda \frac{C(z)\ P_Z(z)\ Q_Z(z) + F_1(z)\ B(z)\ P_N(z)\ Q_N(z)}{\left[B(z)\ Q_N(z) + A(z)\ Q_Z(z)\right] P_Z(z)} \tag{4.2.52}$$

oder mit Gl.(4.2.34)

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \lambda \frac{C(z)\ P_Z(z)\ Q_Z(z) + F_1(z)\ B(z)\ P_N(z)\ Q_N(z)}{G_C(z)\ P_Z(z)} . \tag{4.2.53}$$

Der Nenner der Störübertragungsfunktion setzt sich aus dem Polynom $G_C(z)$ und dem Zählerpolynom der Ausgangsgrößenbewertung zusammen. Der Zähler der Störübertragungsfunktion kann in ähnlicher Weise, wie dies im vorigen Abschnitt durchgeführt wurde, als Polynomgleichung aufgefaßt werden. Dabei können die Polynome $P_Z(z)$ und $P_N(z)$ so bestimmt werden, daß für das Zählerpolynom der Störübertragungsfunktion ein vorgegebenes Polynom $G_H(z)$ erreicht wird.

Für das Zählerpolynom ergibt sich mit Gl.(4.2.53)

$$G_H(z) = C(z)\ P_Z(z)\ Q_Z(z) + F_1(z)\ B(z)\ P_N(z)\ Q_N(z) . \tag{4.2.54}$$

Die Minimalbedingung analog zu Abschnitt 4.2.5 lautet

$$\mathrm{Grad}\{P_Z\} \geq \mathrm{Grad}\{B\} + \mathrm{Grad}\{F_1\} + \mathrm{Grad}\{Q_N\} \tag{4.2.55}$$

und

$$\mathrm{Grad}\{P_N\} \geq \mathrm{Grad}\{C\} + \mathrm{Grad}\{Q_Z\} . \tag{4.2.56}$$

Der Grad von $G_H(z)$ bestimmt sich gemäß Gl.(4.2.54) zu

$$\text{Grad}\{G_H\} \leq \max\{\text{Grad}\{C\} + \text{Grad}\{P_Z\} + \text{Grad}\{Q_Z\};$$
$$\text{Grad}\{F_1\} + \text{Grad}\{B\} + \text{Grad}\{P_N\} + \text{Grad}\{Q_N\}\}. \quad (4.2.57)$$

Falls

$$\text{Grad}\{G_H\} < \min\{\text{Grad}\{C\} + \text{Grad}\{P_Z\} + \text{Grad}\{Q_Z\};$$
$$\text{Grad}\{F_1\} + \text{Grad}\{B\} + \text{Grad}\{P_N\} + \text{Grad}\{Q_N\}\} \quad (4.2.58)$$

gilt, müssen die Polynome $C(z)\, P_Z(z)\, Q_Z(z)$ und $F_1(z)\, B(z)\, P_N(z)\, Q_N(z)$ den gleichen Grad besitzen.

Nach Vorgabe von $G_H(z)$ und der Vorgabe des Grads von $P_Z(z)$ gemäß Gl.(4.2.55) oder der Vorgabe des Grads von $P_N(z)$ gemäß Gl.(4.2.56) bestimmt sich der Grad des anderen Polynoms aus der Bedingung, daß die Zahl der unbekannten Koeffizienten gleich der Zahl der Gleichungen für den Koeffizientenvergleich ist. Wird der Grad von $P_Z(z)$ zu

$$\text{Grad}\{P_Z\} = \text{Grad}\{B\} + \text{Grad}\{F_1\} + \text{Grad}\{Q_N\} \quad (4.2.58)$$

vorgegeben, so lassen sich die unbekannten Koeffizienten, deren Anzahl n_p durch

$$n_p = \text{Grad}\{P_Z\} + \text{Grad}\{P_N\} + 1 \quad (4.2.59)$$

gegeben ist, eindeutig bestimmen, falls

$$\text{Grad}\{P_Z\} + \text{Grad}\{P_N\} + 1 = \max\{\text{Grad}\{G_H\} + 1;$$
$$\text{Grad}\{C\} + \text{Grad}\{P_Z\} + \text{Grad}\{Q_Z\} + 1\} \quad (4.2.60)$$

gilt.

Damit ergibt sich für den Grad von $P_N(z)$:

$$\text{Grad}\{P_N\} = \max\{\text{Grad}\{G_H\} - \text{Grad}\{P_Z\};\ \text{Grad}\{C\} + \text{Grad}\{Q_Z\}\}\ . \quad (4.2.61)$$

Wird der Grad von $P_N(z)$ zu

$$\text{Grad}\{P_N\} = \text{Grad}\{C\} + \text{Grad}\{Q_Z\} \tag{4.2.62}$$

vorgegeben, so lassen sich die n_p unbekannten Koeffizienten eindeutig bestimmen, falls

$$\text{Grad}\{P_N\} + \text{Grad}\{P_Z\} + 1 = \max\{\text{Grad}\{G_H\} + 1;\ \text{Grad}\{F_1\} + \text{Grad}\{B\} + \text{Grad}\{P_N\} + \text{Grad}\{Q_N\} + 1\} \tag{4.2.63}$$

gilt. Damit ergibt sich für den Grad von $P_Z(z)$:

$$\text{Grad}\{P_Z\} = \max\{\text{Grad}\{G_H\} - \text{Grad}\{P_N\};\ \text{Grad}\{F_1\} + \text{Grad}\{B\} + \text{Grad}\{Q_N\}\}. \tag{4.2.64}$$

Ähnlich wie bei der Lösung der Polynomgleichung für $G_C(z)$ gemäß Abschnitt 4.2.5 kann auch der Grad von $P_N(z)$ und $P_Z(z)$ erhöht werden. Die zusätzlichen Freiheitsgrade können dabei zur Festlegung geeigneter Wurzeln von $P_Z(z)$ oder $P_N(z)$ benutzt werden. Diese Möglichkeit wurde hier allerdings bei der Berechnung der Beziehungen für den Grad von $P_Z(z)$ und $P_N(z)$ nicht berücksichtigt.

4.2.7. Der Zusammenhang zwischen charakteristischer Gleichung und Zählerpolynom der Störübertragungsfunktion

Mittels der "Identitätsgleichung"

$$C(z)\ P_Z(z) = F_1(z)\ P_N(z)\ A(z) + z^{-d}\ K_1(z) \tag{4.2.65}$$

läßt sich ein Zusammenhang zwischen dem Polynom

$$G_C(z) = Q_Z(z)\ A(z) + B(z)\ Q_N(z) \tag{4.2.66}$$

und dem Zählerpolynom der Störübertragungsfunktion

$$G_H(z) = C(z)\ P_Z(z)\ Q_Z(z) + F_1(z)\ B(z)\ P_N(z)\ Q_N(z) \tag{4.2.67}$$

herstellen.

Gl.(4.2.67) läßt sich mit Gl.(4.2.65) umformen und ergibt

$$G_H(z) = \left[F_1(z)\ P_N(z)\ A(z) + z^{-d}\ K_1(z)\right]\ Q_Z(z)$$

$$+ F_1(z)\ B(z)\ P_N(z)\ Q_N(z)$$

$$= F_1(z)\ P_N(z)\ \left[Q_Z(z)\ A(z) + B(z)\ Q_N(z)\right] + z^{-d}\ K_1(z)\ Q_Z(z)$$

$$= F_1(z)\ P_N(z)\ G_C(z) + z^{-d}\ K_1(z)\ Q_Z(z)\ . \qquad (4.2.68)$$

Bei Vorgabe von $G_H(z)$ und $G_C(z)$ und entsprechender Festlegung von $P_Z(z)$, $P_N(z)$, $Q_Z(z)$ und $Q_N(z)$ bestimmt sich der Grad von $K_1(z)$ für den Fall, daß

$$\text{Grad}\{G_H\} < \min\{\text{Grad}\{F_1\} + \text{Grad}\{P_N\} + \text{Grad}\{G_C\};$$

$$\text{Grad}\{K_1\} + \text{Grad}\{Q_Z\} + d\} \qquad (4.2.69)$$

gilt, mit

$$\text{Grad}\{F_1\} = d-1$$

zu

$$\text{Grad}\{K_1\} = \text{Grad}\{P_N\} + \text{Grad}\{G_C\} - \text{Grad}\{Q_Z\} - 1\ . \qquad (4.2.70)$$

Aus der Identitätsgleichung Gl.(4.2.65) ergibt sich hingegen

$$\text{Grad}\{K_1\} = \text{Grad}\{P_N\} + \text{Grad}\{A\} - 1\ . \qquad (4.2.71)$$

Der Widerspruch zwischen Gl.(4.2.71) und Gl.(4.2.70) ist allerdings nur scheinbar, da die Festlegung des Grades von $K_1(z)$ aufgrund der "Identitätsgleichung" ohne die Kenntnis einer speziellen Wahl von $G_C(z)$ und $G_H(z)$ getroffen wird. Die Gradbedingung Gl.(4.2.70) berücksichtigt die spezielle Wahl von $G_C(z)$, $G_H(z)$ und damit von $Q_Z(z)$, $Q_N(z)$, $P_Z(z)$ und $P_N(z)$. Sie stellt deshalb die schärfere Bedingung dar. (Dies wirkt sich besonders dann aus, wenn $G_C(z)$ und

$G_H(z)$ von sehr niedrigem Grad gewählt werden.) Die "Identitätsgleichung" Gl.(4.2.65) und die entsprechende Gradbedingung Gl. (4.2.71) geben die Anzahl des notwendigen Grads für $K_1(z)$ an, damit die Koeffizienten von $K_1(z)$ in eindeutiger Weise gemäß der Identitätsbeziehung Gl.(4.2.65) bestimmt werden können. Eine Aussage hingegen, daß die höheren Koeffizienten ungleich Null sind und damit der wirkliche Grad von $K_1(z)$ dem in Gl.(4.2.71) berechneten Grad auch entspricht, kann nicht abgeleitet werden. Es ist stets möglich, und dies wird durch Gl.(4.2.70) beschrieben, falls

$$\text{Grad}\{P_N\} + \text{Grad}\{G_C\} - \text{Grad}\{Q_Z\} - 1 < \text{Grad}\{P_N\} + \text{Grad}\{A\} - 1 \quad (4.2.72)$$

gilt, daß entsprechend viele Koeffizienten von $K_1(z)$ identisch Null sind. Die Gradbedingung der Identitätsgleichung lautet entsprechend dieser Betrachtungsweise

$$\text{Grad}\{K_1\} \leq \text{Grad}\{P_N\} + \text{Grad}\{A\} - 1 \; . \quad (4.2.73)$$

Der Grad von $K_1(z)$ bestimmt sich damit zu

$$\text{Grad}\{K_1\} = \min\{\text{Grad}\{P_N\} + \text{Grad}\{A\} - 1;$$

$$\text{Grad}\{P_N\} + \text{Grad}\{G_C\} - \text{Grad}\{Q_Z\} - 1\} \; . \quad (4.2.74)$$

Die Bedingung, daß das Polynom $K_1(z)$ durch die jeweils schärfere Bedingung von Gl.(4.2.70) und (4.2.71) bestimmt wird, hat weitgehende Konsequenzen für die Schätzung des Prädiktors (siehe Abschnitt 4.3). Falls der Grad von $G_C(z)$ und $G_H(z)$ sehr niedrig gewählt wird, reduziert sich die Zahl der zu schätzenden Parameter des Prädiktors um die Zahl der Parameter von $K_1(z)$, die gemäß Gl.(4.2.70) identisch Null sein müssen. Für eine Regelstrecke dritter Ordnung mit einer Totzeit von drei Abtastschritten mit

$$\text{Grad}\{B\} = \text{Grad}\{A\} = \text{Grad}\{C\} = 3$$

und der Vorgabe des Grads des charakteristischen Polynoms $G_C(z)$ und des Grads des Zählerpolynoms $G_H(z)$ der Störübertragungsfunktion zu

$$\text{Grad}\{G_C\} = 2 \quad \text{und} \quad \text{Grad}\{G_H\} = 2$$

ergibt sich bei der Festlegung von zwei Wurzeln von $Q_Z(z)$ bei $z = 1$:

$$\text{Grad}\{Q_N\} = 5, \quad \text{Grad}\{Q_Z\} = 5,$$

$$\text{Grad}\{P_N\} = 8, \quad \text{Grad}\{P_Z\} = 10 .$$

Entsprechend Gl.(4.2.70) ergibt sich Grad $\{K_1\} = 4$, während sich gemäß Gl.(4.2.71) Grad $\{K_1\} = 10$ ergeben würde.

Die obige "formale" Begründung für die niedrige Ordnung von $K_1(z)$ hat einen leicht verständlichen Hintergrund. Wird die charakteristische Gleichung von niedriger Ordnung gewählt, bedeutet dies gleichzeitig, daß der Zähler der Parallelschaltung aus Regelstrecke und Kompensationsnetzwerk ebenfalls von niedriger Ordnung ist. Damit werden für dieses Ersatzsystem zur Ausrechnung der Vorhersage entsprechend weniger zurückliegende Stellsignale benötigt. Gerade die Zahl der in die Prädiktion mit einzubeziehenden Stellsignale wird aber durch den Grad von $K_1(z)$ festgelegt.

4.2.8. Die Bewertung des Führungssignals

Die Ausgangsgröße bei Führungsverhalten läßt sich gemäß Gl.(4.2.28) mittels Gl.(4.2.34) zu

$$Y(z) = \frac{B(z)\ R_Z(z)\ Q_N(z)\ P_N(z)}{G_C(z)\ R_N(z)\ P_Z(z)}\ z^{-d}\ W(z) \qquad (4.2.75)$$

beschreiben. Wird $B(z)$ in ein Polynom $B_1(z)$, das Wurzeln innerhalb des Einheitskreises besitzt, und ein Polynom $B_2(z)$ zerlegt, dessen Wurzeln außerhalb des Einheitskreises liegen, also $B(z) = B_1(z)\ B_2(z)$, so kann als Ansatz für die Führungsübertragungsfunktion

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{B_2(z)\ Q_1(z)}{P_1(z)}\ z^{-d} \qquad (4.2.76)$$

gewählt werden. $R_Z(z)$ bestimmt sich dann zu

$$R_Z(z) = Q_1(z)\ P_Z(z)\ G_C(z) \qquad (4.2.77)$$

und $R_N(z)$ zu

$$R_N(z) = B_1(z)\ P_1(z)\ Q_N(z)\ P_N(z) . \qquad (4.2.78)$$

4.3. Adaptive Realisierung

Für die adaptive Realisierung des erweiterten ST-Reglers mit Korrekturnetzwerk wird ein Parameterschätzverfahren mit dem Regelgesetz kombiniert. Zur Bestimmung des Prädiktors kann, ähnlich wie bei dem einfachen ST-Regler nach Åström und Wittenmark (1973) und Clarke und Gawthrop (1979a), ein Parameterschätzverfahren benutzt werden. [1] Das momentane Stellsignal wird aus der Forderung berechnet, daß die Prädiktion des Hilfssignals ϕ gemäß Bild 4.1.2 Null gesetzt wird.

Für die Schätzung des Prädiktors bestehen zwei Möglichkeiten. Die erste Möglichkeit, die hier nicht behandelt wird, besteht darin, die Parameter des Prädiktors $\phi(k+d/k)$ zu schätzen.

Bei der zweiten Möglichkeit wird die Tatsache benutzt, daß das Hilfssignal $\phi(k+d/k)$ aus drei Teilen besteht, wobei zwei Teile bekannt sind. Es genügt damit, den Prädiktor des Signals $\phi_y(k+d/k)$ zu schätzen.

Gemäß Abschnitt 4.2.3 Gl.(4.2.16) ergibt sich für den Prädiktor von $\phi_y(k+d/k)$

$$\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\} = \frac{K_1(z)}{C(z)\ P_N(z)}\ Y(z) + \frac{B(z)\ F_1(z)}{C(z)}\ U(z) \qquad (4.3.1)$$

und nach Einführung eines gefilterten Signals

$$Y_f(z) = \frac{1}{P_N(z)}\ Y(z) \qquad (4.3.2)$$

$$\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\} = \frac{K_1(z)}{C(z)}\ Y_f(z) + \frac{B(z)\ F_1(z)}{C(z)}\ U(z). \qquad (4.3.3)$$

---

1) Maßnahmen, wie sie in Abschnitt 2.3 vorgestellt wurden, um eine gute Identifikation zu gewährleisten, können hier ebenfalls verwendet werden.

Nach Transformation in den Zeitbereich ergibt sich mit den Vektoren

$$\underline{k}_1^T = \left[k_1, \ \ldots \ k_l\right] \qquad l = \min\{\mathrm{Grad}\{P_N\} + \mathrm{Grad}\{A\} - 1; \ \mathrm{Grad}\{P_N\} + \mathrm{Grad}\{G_C\} - \mathrm{Grad}\{Q_Z\} - 1\} \tag{4.3.4a}$$

$$\underline{k}^T = \left[k_o, \ \underline{k}_1^T\right] \tag{4.3.4b}$$

$$\underline{b}_1^T = \left[b_1, \ \ldots \ b_h\right] \qquad h = \mathrm{Grad}\{B\} + d - 1 \tag{4.3.4c}$$

$$\underline{b}^T = \left[b_o, \ \underline{b}_1^T\right] \tag{4.3.4d}$$

$$\underline{c}^T = \left[c_1, \ \ldots \ c_{n_c}\right] \qquad n_c = \mathrm{Grad}\{C\} \tag{4.3.4e}$$

$$\underline{y}_{fk}^T = \left[y_{fk-1}, \ \cdots \ y_{fk-l}\right] \tag{4.3.4f}$$

$$\underline{y}_{f1k}^T = \left[y_{fk}, \ \underline{y}_{fk}^T\right] \tag{4.3.4g}$$

$$\underline{u}_k^T = \left[u_{k-1}, \ \cdots \ u_{k-h}\right] \tag{4.3.4h}$$

$$\underline{u}_{1k}^T = \left[u_k, \ \underline{u}_k^T\right] \tag{4.3.4i}$$

$$\underline{\phi}_{yk}^T = \left[\phi_{y\,k+d-1/k-1}, \cdots, \phi_{y\,k-n_c+d/k-n_c}\right] \tag{4.3.4j}$$

und den zusammengefaßten Vektoren

$$\underline{m}_k^T = \left[\underline{y}_{fk}^T, \ \underline{u}_k^T, \ \underline{\phi}_{yk}^T\right] \tag{4.3.4k}$$

$$\underline{m}_{1k}^T = \left[\underline{y}_{f1k}^T, \ \underline{u}_{1k}^T, \ \underline{\phi}_{yk}^T\right] \tag{4.3.4l}$$

und

$$\underline{p}_1^T = \left[\underline{k}_1^T,\ \underline{b}_1^T,\ \underline{c}^T\right] \tag{4.3.4m}$$

$$\underline{p}^T = \left[\underline{k}^T,\ \underline{b}^T,\ \underline{c}^T\right] \tag{4.3.4n}$$

$$\phi_y(k+d) = \underline{p}^T \cdot \underline{m}_{1k} \,. \tag{4.3.5}$$

Die Parameter eines Modells des Prädiktors der Form

$$\mathcal{Z}\{\hat{\phi}_y(k+d/k)\} = \frac{\hat{K}_1(z)}{\hat{C}(z)}\, Y_f(z) + \frac{\hat{B}_f(z)}{\hat{C}(z)}\, U(z) + \varepsilon(z) \tag{4.3.6}$$

werden mittels eines Parameterschätzverfahrens im Sinne der kleinsten Quadrate nachgestellt.

Für das Modell können analog zu Gl.(4.3.4) und (4.3.5) Vektoren eingeführt werden:

$$\underline{\hat{k}}_1^T = \left[\hat{k}_1,\ \ldots\ \hat{k}_l\right] \qquad l = \min\{\mathrm{Grad}\{P_N\} + \mathrm{Grad}\{A\} - 1;\ \mathrm{Grad}\{P_N\} + \mathrm{Grad}\{G_C\} - \mathrm{Grad}\{Q_Z\} - 1\} \tag{4.3.7a}$$

$$\underline{\hat{k}}^T = \left[\hat{k}_o,\ \underline{\hat{k}}_1^T\right] \tag{4.3.7b}$$

$$\underline{\hat{b}}_1^T = \left[\hat{b}_1,\ \ldots\ \hat{b}_h\right] \qquad h = \mathrm{Grad}\{\hat{B}\} + d - 1 \tag{4.3.7c}$$

$$\underline{\hat{b}}^T = \left[\hat{b}_o,\ \underline{\hat{b}}_1^T\right] \tag{4.3.7d}$$

$$\underline{\hat{c}}^T = \left[\hat{c}_1,\ \ldots\ \hat{c}_{n_c}\right] \qquad n_c = \mathrm{Grad}\{\hat{C}\} \tag{4.3.7e}$$

$$\underline{\hat{p}}_1^T = \left[\underline{\hat{k}}_1^T,\ \underline{\hat{b}}_1^T,\ \underline{\hat{c}}^T\right] \tag{4.3.7f}$$

$$\underline{p}^T = \left[\underline{\hat{k}}^T,\ \underline{\hat{b}}^T,\ \underline{\hat{c}}^T\right] . \tag{4.3.7g}$$

Der Vektor $\underline{\phi}_{yk}$ wird für die Schätzung durch den Signalvektor

$$\hat{\underline{\phi}}_{yk}^T = \left[\hat{\phi}_{yk+d-1/k-1}, \cdots \hat{\phi}_{yk-n_c+d/k-n_c}\right] \tag{4.3.8}$$

substituiert. Der Signalvektor $\underline{m}_k$ wird dann entsprechend durch den Vektor

$$\hat{\underline{m}}_k^T = \left[\underline{y}_{fk}^T, \underline{u}_k^T, \hat{\underline{\phi}}_{yk}^T\right] \tag{4.3.9a}$$

$$\hat{\underline{m}}_{1k}^T = \left[\underline{y}_{f1k}, \underline{u}_{1k}^T, \hat{\underline{\phi}}_{yk}^T\right] \tag{4.3.9b}$$

ersetzt.

Zur Schätzung des Prädiktors werden die um d Schritte verschobenen Werte benutzt. Die Schätzgleichung lautet:

$$\hat{\underline{p}}_k = \hat{\underline{p}}_{k-1} + \underline{g}_k \, \varepsilon_k \tag{4.3.10a}$$

$$\varepsilon_k = \phi_y(k) - \hat{\phi}_y(k/k-d)$$

$$= \phi_y(k) - \hat{\underline{p}}_{k-1}^T \, \hat{\underline{m}}_{1k-d} \tag{4.3.10b}$$

$$\underline{g}_k = \underline{\Lambda}_{k-1} \, \hat{\underline{m}}_{1k-d} \, \frac{1}{\gamma + \hat{\underline{m}}_{1k-d}^T \, \underline{\Lambda}_{k-1} \, \hat{\underline{m}}_{1k-d}} \tag{4.3.10c}$$

$$\underline{\Lambda}_k = \frac{1}{\gamma}\left[\underline{I} - \underline{\Lambda}_{k-1} \, \hat{\underline{m}}_{1k-d} \, \hat{\underline{m}}_{1k-d}^T (\gamma + \hat{\underline{m}}_{1k-d}^T \, \underline{\Lambda}_{k-1} \, \hat{\underline{m}}_{1k-d})^{-1}\right] \underline{\Lambda}_{k-1} \, . \tag{4.3.10d}$$

Im Gegensatz zu dem von Aström und Wittenmark vorgeschlagenen ST-Regler kann die Schätzung des C-Polynoms im allgemeinen nicht vermieden werden. Dieser Unterschied hängt damit zusammen, daß das Regelgesetz nicht die Aufgabe hat, die Vorhersage $\phi_y(k+d/k)$ zu Null zu setzen. Falls allerdings die Bewertung von Stellsignal und Führungssignal gleich Null gewählt wird, kann die Schätzung des C-Polynoms vermieden werden.

Eine Vorgabe eines Parameters zur Erreichung der Identifizierbarkeit ist nicht notwendig, weil der erste Parameter von C(z) zu Eins gewählt wird.

Betrachten wir die Zahl der zu schätzenden Parameter, so ist der Unterschied der hier vorgeschlagenen Strategie im Vergleich zu der von Clarke und Gawthrop vorgeschlagenen deutlich zu erkennen.

Die Zahl $n_{\hat{p}}$ der zu schätzenden Parameter beträgt

$$n_{\hat{p}} = 1+h+n_c = \text{Grad}\{A\} + \text{Grad}\{P_N\}-1 + \text{Grad}\{B\}+d-1 \ . \qquad (4.3.11)$$

Im Gegensatz zu Clarke und Gawthrop, die die Polynome $P_Z(z)$ und $P_N(z)$ zur Beseitigung der Nichtminimalphasigkeit benutzen und eine Bewertung des Stellsignals nur mit einem Faktor vornehmen, beeinflussen die Parameter von $Q_Z(z)$ und $Q_N(z)$, die die Nichtminimalphasigkeit beseitigen, nicht die Schätzung. Damit hängt die Ordnung von P(z) nicht mehr von der Nichtminimalphasigkeit ab und kann frei gewählt werden. Dies bedeutet gleichzeitig, daß durch diese freie Wahl von P(z) auch die Zahl der Parameter beeinflußt werden kann und trotz Beseitigung der Nichtminimalphasigkeit die minimale Anzahl

$$n_{\hat{p}\,min} = \text{Grad}\{A\} + \text{Grad}\{B\} + d-2 \qquad (4.3.12)$$

der Parameter erreicht werden kann.

Soll das Kompensationsnetzwerk z. B. im Falle sehr großer Parameterschwankungen nachgeführt werden, so kann mittels eines zweiten Parameterschätzverfahrens ein Modell der Regelstrecke der Form

$$Y(z)\ \hat{A}(z) = \hat{B}(z)\ z^{-d}\ U(z) + \lambda \hat{C}(z)\ E(z) \qquad (4.3.13)$$

geschätzt werden.

Mittels der aus dem zweiten Parameterschätzverfahren erhaltenen Parameter kann bei Vorgabe eines charakteristischen Polynoms durch Lösung der Polynomgleichung (4.2.34) eine adaptive Nachstellung der Stellbewertung erfolgen.

Mit den geschätzten Parametern ergibt sich damit

$$\hat{B}_k(z)\ \hat{Q}_{Nk}(z) + \hat{A}_k(z)\ \hat{Q}_{Zk}(z) = G_C(z)\ . \qquad (4.3.14)$$

Wird die zweite Parameterschätzung zusammen mit der adaptiven Nachstellung gemäß Gl.(4.3.14) benutzt, ist, falls die Parameter von $\hat{B}_k(z)$ und $\hat{A}_k(z)$ gegen die exakten Parameter konvergieren, ein konstantes charakteristisches Polynom bei sich verändernden Parametern gewährleistet.

Eine Nachstellung zur Erzielung eines konstanten Zählerpolynoms $G_H(z)$ der Störübertragungsfunktion kann mittels der geschätzten Parameter des Prädiktors erfolgen.

Wird gemäß Gl.(4.2.54) $G_H(z)$ fest vorgegeben, dann kann durch Lösung der Polynomgleichung eine entsprechende Ausgangsbewertung erzielt werden. Aus Gl.(4.2.54) erhalten wir mit den geschätzten Parametern

$$G_H(z) = \hat{C}_k(z)\ \hat{P}_{Zk}(z)\ Q_Z(z) + \hat{B}_{fk}(z)\ \hat{P}_{Nk}(z)\ Q_N(z) \qquad (4.3.15)$$

oder bei nachgeführten Polynomen $Q_Z(z)$ und $Q_N(z)$

$$G_H(z) = \hat{C}_k(z)\ \hat{P}_{Zk}(z)\ \hat{Q}_{Zk}(z) + \hat{B}_{fk}(z)\ \hat{P}_{Nk}(z)\ \hat{Q}_{Nk}(z)\ . \qquad (4.3.16)$$

Für die Führungsübertragungsfunktion kann entsprechend, falls $\hat{B}_k(z)$ in einen stabilen und instabilen Teil zerlegt wird, eine Nachführung gemäß Gl.(4.2.77) und (4.2.78) erfolgen. Es ergibt sich

$$R_Z(z) = Q_1(z)\ \hat{P}_{Zk}(z)\ G_C(z) \qquad (4.3.17)$$

und

$$R_N(z) = \hat{B}_{1k}(z)\ P_1(z)\ \hat{Q}_{Nk}(z)\ \hat{P}_{Nk}(z)\ . \qquad (4.3.18)$$

4.3.1. Die Berechnung des momentanen Stellsignals

Das momentane Stellsignal u(k) kann in zwei Stufen berechnet werden (siehe Abschnitt 4.2.3). Das Stellsignal u'(k) der ersten Stufe wird aus der Bedingung

$$\mathcal{Z}^{-1}\{R(z)\cdot W(z)\} - \hat{\phi}_y(k+d/k) \stackrel{!}{=} 0 \qquad (4.3.19)$$

bestimmt.

Führen wir ein Signal w'(k) als das momentan wirksame Führungssignal mit

$$w'(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{R(z)\ W(z)\} \qquad (4.3.20)$$

ein, so ergibt sich mit den Schätzparametern gemäß Gl.(4.3.7)

$$w'(k) - u'(k)\ \hat{b}_o - \hat{k}_o\ y(k) - \hat{\underline{p}}_{1k}^T\ \underline{m}_k \stackrel{!}{=} 0$$

oder

$$u'(k) = \frac{w'(k) - \hat{\underline{p}}_{1k}^T\ \underline{m}_k - \hat{k}_o\ y(k)}{\hat{b}_o} \ . \qquad (4.3.21)$$

Das eigentliche Stellsignal berechnet sich analog zu Gl.(4.2.27) zu

$$U(z) = \frac{1}{1 + \frac{Q(z)\cdot P(z)}{\hat{b}_o}}\ U'(z) \qquad (4.3.22)$$

oder bei Nachstellung von Q(z) und P(z) zu

$$U(z) = \frac{1}{1 + \frac{\hat{Q}(z)\cdot \hat{P}(z)}{\hat{b}_o}}\ U'(z) \ . \qquad (4.3.23)$$

5. Ergebnisse

5.1. Testprozesse und Testbedingungen

Die Erprobung der in der vorliegenden Arbeit entwickelten Verfahren wurde an vier Testprozessen zweiter und dritter Ordnung durchgeführt. Die Testprozesse wurden analog simuliert, während die Regelalgorithmen auf dem Prozeßrechner HP 2100 A in dem vorhandenen KEDDC-Programmsystem (Schmid, Unbehauen (1979)) implementiert wurden.

Die Testprozesse sind in Tabelle 5.1.1 beschrieben. Diese Testprozesse (TP) sind für eine relativ große Anzahl von Regelstrecken in der Praxis repräsentativ. Insbesondere soll in diesem Zusammenhang auf den Testprozeß 4 hingewiesen werden. Dieser Testprozeß stellt das Modell eines wichtigen Teilsystems eines Hochofens dar und wurde aus Messungen mittels Mehrgrößenidentifikationsverfahren (Diekmann (1981)) von Schwarz (1980) berechnet.

In Bild 5.1.1 sind die Übergangsfunktionen für TP1 bis TP4 für die beiden extremen Parametersätze, die mit a und b bezeichnet werden, dargestellt.

Die in den Kapiteln 2 bis 4 entwickelten Verfahren sind nicht auf alle Testprozesse gleichermaßen anwendbar. Dies hängt von der Lage der Nullstellen in Abhängigkeit von der gewählten Abtastzeit ab. Zur besseren Übersicht sind die Nullstellen in Tabelle 5.1.2 zusammengestellt.

Beim Vergleich von Regelalgorithmen interessiert primär das reine Stör- und Führungsverhalten. Bei dem durchgeführten Vergleich wurden sprungförmige Änderungen der Führungsgröße (Kennung Δw) und der Störgröße am Streckeneingang (Kennung Δz) vorgenommen. Die Parameter der Regelstrecke wurden ebenfalls sprungförmig geändert. Zur Untersuchung bei stochastischem Rauschen wurde ein gaußverteiltes weißes Rauschen am Streckeneingang aufgeschaltet, während das Führungssignal sprungförmig geändert wurde (Kennung Δw_s).

	Übertragungsfunktion	Parametersatz a	Parametersatz b
TP 1	$\frac{K}{(\frac{s}{-s_1}+1)(\frac{s}{-s_2}+1)^2}$	$K = 5$ $s_1 = -10$ $s_2 = -1$	$K = 5$ $s_1 = -1$ $s_2 = -1$
TP 2	$\frac{K(\frac{s}{-s_3}+1)}{(\frac{s}{-s_1}+1)(\frac{s}{-s_2}+1)} e^{-2s}$	$K = 11$ $s_1 = -1$ $s_2 = -0,2$ $s_3 = 1$	$K = 11$ $s_1 = -1$ $s_2 = -0,111$ $s_3 = 1$
TP 3	$\frac{K(\frac{s}{-s_3}+1)}{(\frac{s}{-s_1}+1)(\frac{s}{-s_2}+1)}$	$K = 7,5$ $s_{1/2} = -0,09 \pm j0,23$ $s_3 = 0,36$	$K = 3$ $s_{1/2} = -0,16 \pm 0,23j$ $s_3 = 0,35$
TP 4 a 1)	a) $\frac{K(\frac{s}{-s_4}+1)(\frac{s}{-s_5}+1)}{(\frac{s}{-s_1}+1)(\frac{s}{-s_2}+1)(\frac{s}{-s_3}+1)}$	$K = 4,8$ $s_{1/2} = -0,84 \pm j1,06$ $s_3 = -0,084$ $s_4 = -2,82$ $s_5 = 0,786$	
TP 4 b	b) $\frac{K(\frac{s}{-s_3}+1)}{(\frac{s}{-s_1}+1)(\frac{s}{-s_2}+1)}$		$K = 8$ $s_1 = -0,754$ $s_2 = -0,098$ $s_3 = 0,883$

Tabelle 5.1.1. Übertragungsfunktionen der Testprozesse TP 1 bis TP 4 bezogen auf die bei der Simulation verwendete normierte Zeit

1) Für den Testprozeß TP 4 werden zwei Modelle unterschiedlicher Ordnung verwendet, da sich bei der Identifikation des Hochofens anhand realer Meßdaten ebenfalls zwei Modelle verschiedener Ordnung ergaben.

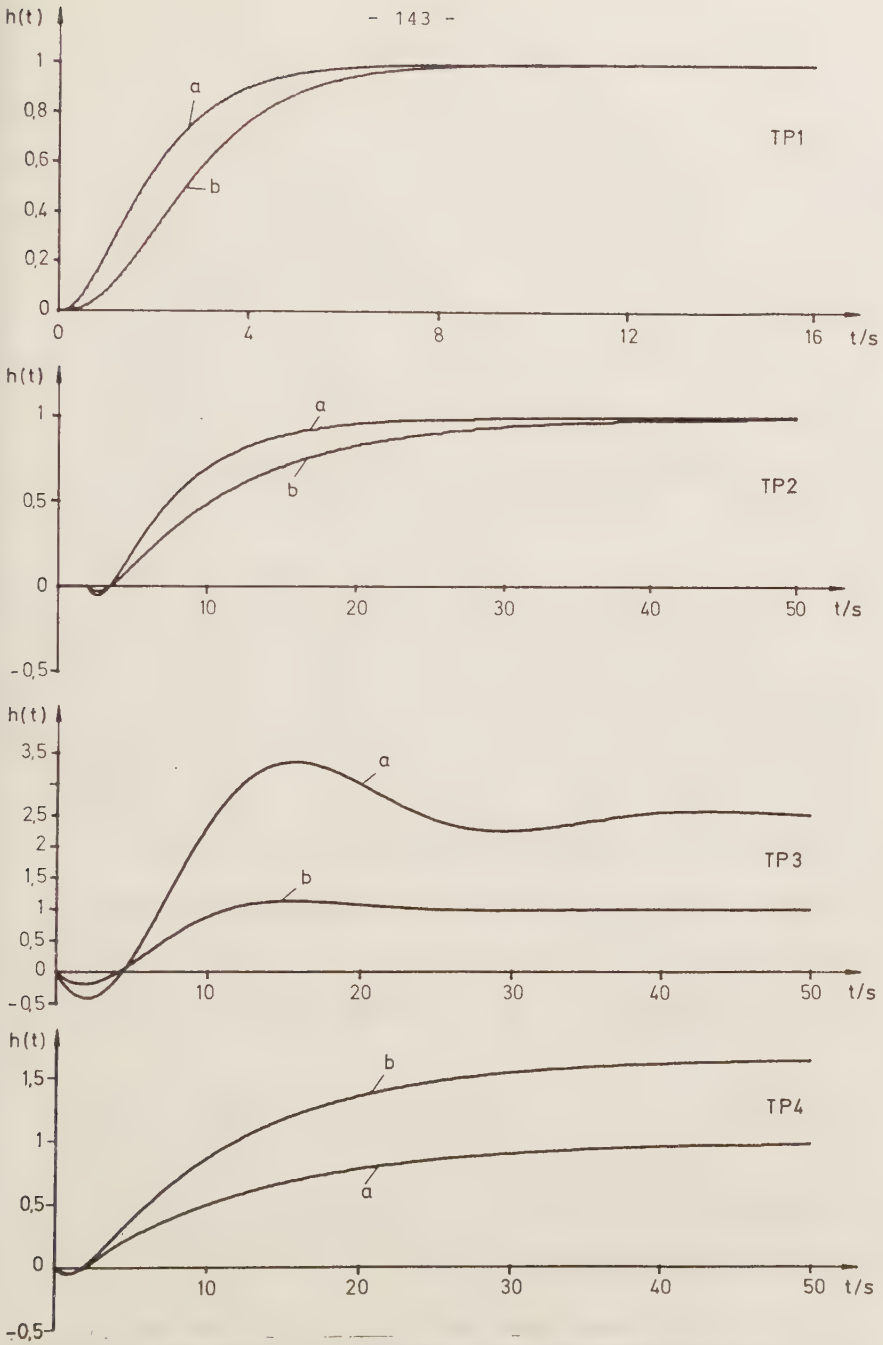

Bild 5.1.1. Normierte Übergangsfunktionen der Testprozesse TP 1 bis TP 4 für die beiden Sätze der Parameter a und b gemäß Tabelle 5.1.1

Abtast-zeit/s	T = 0,5	T = 1	T = 2,5	T = 4
TP 1 a	-1,3 -0,046	-0,735 -0,0099	-0,0005 -0,219	-0,0701 -0,00006
TP 1 b	-2,58 -0,18	-1,80 -0,12	-0,637 -0,0358	-0,230 -0,00954
TP 2 a	1,69	3,59	-0,389 5,81	-7,32 -0,0444
TP 2 b	1,69	3,50	-0,428 6,05	-9,19 -0,0499
TP 3 a	1,20	1,44	2,86	14,14
TP 3 b	1,19	1,43	2,89	32,37
TP 4 a	1,49 0,212	-0,0282 2,37	-0,104 -4,054	-0,686 -0,0257
TP 4 b	1,58	2,80	-3,32	-1,04

Tabelle 5.1.2. Lage der Nullstellen in Abhängigkeit von der Abtastzeit

Zur einheitlichen Beurteilung der Verfahren werden die folgenden vier Kenngrößen benutzt:

Für die Regelgüte:

$$I_e = \frac{1}{c}\sqrt{\sum_{i=0}^{N} (w_i - y_i)^2} \qquad (5.1.1)$$

Für den Stellgrößenaufwand:

$$I_u = \frac{1}{c}\sqrt{\sum_{i=0}^{N} (u_i - u_\infty)^2} \qquad (5.1.2)$$

Für die Überschwingweite:

$$e_{max} = \frac{y_{max} - y_\infty}{c} \qquad (5.1.3)$$

Für das maximale Unterschwingen:

$$e_u = \frac{-y_{min} + y_o}{c} \qquad (5.1.4)$$

Für die Ausregelzeit:

$T_{3\%}$: $w_i - y_i < 0{,}03c$ für $t > T_{3\%}$.

Zur Durchführung des Vergleichs werden die Werte normiert. Der Normierungsfaktor c ist Tabelle 5.1.3 zu entnehmen.

Kennwert	I_e	I_u	e_{max}	e_u	$T_{3\%}$	N
Sollwert-änderung Δw	Δw	$\Delta w/K$	Δw	Δw	-	$e_i \approx 0$
Störung Δz	Δz K	Δz	Δz K	Δz K	Δz K	$u_i \approx u_\infty$
Sollwert-änderung + stochastische Störung Δw_s	Δw	$\Delta w/K$	-	-	-	-

Tabelle 5.1.3. Normierungswerte

Zur gleichwertigen Berechnung der Kennwerte trotz unterschiedlicher Abtastzeiten wurden alle Versuche mit 0,5 s dokumentiert und ausgewertet.

5.2. Wahl des Identifikationsverfahrens

Bei der Durchführung der Versuche wurde die LS-Methode bzw. die 2. EM-Methode verwendet (siehe Abschnitt 2.3.2). Zur Vermeidung von sogenanntem "Estimator-Wind up" [1] wurde in fast allen Fällen ein

[1] Eine Definition des Begriffs "Estimator-Wind up" findet sich in Abschnitt 2.3.3.

variabler Gewichtungsfaktor benutzt. Eine schnellere Anpassung der Identifikation bei der Umschaltung der Streckenparameter hätte sicher erreicht werden können, falls der Gewichtungsfaktor fest, aber relativ niedrig ($\rho \approx 0{,}97$ bis $0{,}985$) gewählt worden wäre. Die Kovarianzmatrix, die ein Maß für die Verstärkung des Parameternachstellgesetzes des Identifikationsverfahrens darstellt, bleibt größer. Damit ist eine schnellere Nachführung möglich. Eine derartige Wahl kann allerdings bei längerem Betrieb sehr leicht zur Instabilität des Identifikationsverfahrens führen. Eine optimale Wahl des Gewichtungsfaktors kann nur im Zusammenhang mit dem jeweiligen Prozeß getroffen werden und ist von verschiedenen Einflußgrößen wie auftretendem Rauschen, deterministischen Störungen, Häufigkeit der Parameterschwankungen abhängig.

5.3. Entwurfsspezifikationen und Anwendbarkeit auf die verschiedenen Testprozesse

Für die Wahl der Entwurfsspezifikationen sollen hier alle drei Verfahren im einzelnen dargestellt werden.

5.3.1. Spezifikationen für die ST-Regelstrategie für nichtminimalphasige Regelstrecken mit einer Nullstelle rechts des Einheitskreises (ST-NSR)

Als Spezifikation für das Führungsverhalten des geschlossenen Regelkreises wurden einheitlich 10 % Unter- und Überschwingen vorgegeben. Da der Entwurf nur für Regelstrecken mit einer Nullstelle rechts des Einheitskreises entwickelt wurde, wurden die in Tabelle 5.3.1 angegebenen Testprozesse nur mit der jeweils durch einen Stern gekennzeichneten Abtastzeit untersucht.

Abtastzeit/s	0,5	1	2,5	4
TP 1	-	-	-	-
TP 2	-	*	*	-
TP 3	*	*	*	*
TP 4	*	*	-	-

Tabelle 5.3.1. Tabelle der bei verschiedenen Abtastzeiten untersuchten Testprozesse für das Verfahren ST-NSR

Die gewählten Wurzeln des "Beobachterpolynoms" $T_1(z)$ sind in Tabelle 5.3.2 dargestellt.

Abtastzeit/s	0,5	1	2,5	4
TP 1	-	-	-	-
TP 2	-	0,1 ; 0,1	0,1 ; 0,1	-
TP 3	0,1 ± 0,05j	0,1 ± 0,05j	0,1 ± 0,05j	0,1 ± 0,05j
TP 4	0,6 ± 0,05j	0,6 ± 0,05j	-	-

Tabelle 5.3.2. Wurzeln des Beobachterpolynoms

Die Auswirkungen der Wahl des Beobachterpolynoms $T_1(z)$ auf die Koeffizienten und Wurzeln der Reglerpolynome können nur durch mehrmaliges Lösen der Polynomgleichung für verschiedene Beobachterpolynome untersucht werden. Bei der Wahl des Beobachterpolynoms sind die folgenden zwei Gesichtspunkte zu beachten:

1) Die Koeffizienten der Zählerpolynome der Übertragungsfunktionen der beiden Reglerblöcke sollten nicht zu groß werden, da dies ein unruhiges Stellsignal zur Folge haben kann.

2) Das Polynom S(z) des Reglers im Rückwärtszweig darf keine Wurzel bei z=1 besitzen, da sonst der Integralanteil des Polynoms R(z) kompensiert wird und eine bleibende Regelabweichung bei Störungs- und

Führungsregelung auftreten kann. Der notwendige Abstand der Wurzel von S(z) vom Punkt 1 hängt dabei unter anderem von der Genauigkeit der A/D- und D/A-Wandlung ab. (Bei digitaler Simulation mit maximaler Wortlänge des 16-bit-Prozeßrechners tritt dieser Effekt nicht auf.) In der Regel kann stets eine geeignete Lage der Wurzeln von $T_1(z)$ gefunden werden. Dieser Effekt trat besonders bei Testprozeß TP 3 und TP 4 auf und konnte durch die Wahl eines konjugiert komplexen Wurzelpaares beseitigt werden. Bei den Untersuchungen mit stochastischen Störungen wurde das geschätzte Rauschfilterpolynom als Beobachterpolynom verwendet. In einzelnen Fällen hatte dies zur Folge, daß im Polynom S(z) ein Pol bei $z = 1$ auftrat. Eine mögliche Abhilfe ist die Verwendung eines geeigneten, aber festen Beobachterpolynoms.

Bei der Anwendung dieses Verfahrens sollte die Abtastzeit so gewählt werden, daß der Wert der Nullstelle rechts kleiner als 5 ist. Diese Einschränkung hängt damit zusammen, daß für sehr große positive Werte der nichtminimalphasigen Nullstelle ein erneutes Eingreifen des Reglers erst dann erfolgt, wenn das Unterschwingen z. B. bei einem Führungsgrößensprung fast wieder beendet ist. Gleichzeitig kann der große Wert der Nullstelle nur sehr schwer geschätzt werden und führt zu einer ungenauen Spezifikation der gewünschten Führungsübertragungsfunktion.

5.3.2. Spezifikationen für die ST-Regelstrategie mit einer Nullstelle links des Einheitskreises (ST-NSL)

Als Spezifikation für das Führungsverhalten des Regelkreises wurden einheitlich 10 % Überschwingen vorgegeben. Um eine zu hohe Stellamplitude zu verhindern, wurde die Zeit bis zum Erreichen des maximalen Überschwingens t_{max}, wie in Tabelle 5.3.3 dargestellt, festgelegt.

	t_{max}/s
TP 1	4
TP 2	8
TP 3	15
TP 4	9

Tabelle 5.3.3. Gewählte Vorgabezeit t_{max}

Bei Wahl der Zeit t_{max}, insbesondere bei auch im Kontinuierlichen nichtminimalphasigen Regelstrecken, muß der im Vergleich zu minimalphasigen Regelstrecken höhere Stellaufwand in Rechnung gestellt und die Zeit t_{max} entsprechend angepaßt werden. Im allgemeinen ist dann - bei Beachtung der entsprechenden Stellgröße und der Bandbreite - auch die Forderung nach einem κ-Wert zur Berechnung der Näherungsformeln gemäß Abschnitt 3.2 erfüllt.

Die Testprozesse TP 1 bis TP 4 wurden für die in Tabelle 5.3.4 dargestellten Abtastzeiten untersucht.

Abtastzeit/s	0,5	1	2,5	4
TP 1	*	*	*	$\kappa \ll 1$
TP 2	-	*	-	-
TP 3	*	*	*	*
TP 4	*	*	*	*

Tabelle 5.3.4. Tabelle der bei verschiedenen Abtastzeiten untersuchten Testprozesse für das Verfahren ST-NSL

Die Wurzeln des Beobachterpolynoms wurden entsprechend Tabelle 5.3.5 gewählt.

Abtastzeit	0,5	1	2,5	4
TP 1	0,6; 0,6; 0,1	0; 0,31; 0,31	0; 0,1; 0,2	-
TP 2	-	0,2; 0,2	-	-
TP 3	0,5 ± 0,05j	0,3 ± 0,05j	0,3 ± 0,05j	0,3 ± 0,05j
TP 4	0,6 ± 0,05j	0,6 ± 0,05j	0,6 ± 0,05j	0,6 ± 0,05j

Tabelle 5.3.5. Wurzeln des Beobachterpolynoms $T_1(z)$

Bei extrem großen Abtastschritten - dies ist bei TP 1 bei einer Abtastzeit von T = 4 s der Fall - kann kein genügend großer κ-Wert erreicht werden.

5.3.3. Spezifikationen für die ST-Regelstrategie mit Kompensationsnetzwerk (STK)

Der Entwurf des ST-Reglers mit Kompensationsnetzwerk, wie er in Kapitel 4 vorgestellt wurde, kann unter verschiedenen Gesichtspunkten angewandt werden. Mit Hilfe eines festen Korrekturnetzwerks besteht die Möglichkeit, die Nichtminimalphasigkeit der Regelstrecke zu beseitigen und damit das charakteristische Polynom des Regelkreises festzulegen. Mit Hilfe einer zweiten Übertragungsfunktion kann das Zählerpolynom der Störübertragungsfunktion, das gleichzeitig das Nennerpolynom des Reglers darstellt, beeinflußt werden. Prinzipiell besteht die Möglichkeit, wie dies in Abschnitt 4 dargestellt wurde, die beiden Vorgaben durch Lösen von Polynomgleichungen in der dargestellten Weise zu berechnen. Die Lösung mittels Polynomgleichungen stellte sich im Rahmen der Untersuchung als sehr schwierig heraus. Dies liegt darin begründet, daß zwar einerseits die Lösung von Polynomgleichungen relativ leicht möglich ist, aber andererseits mit den bis jetzt bekannten Methoden nicht gewährleistet werden kann, daß Bedingungen, wie z. B. die asymptotische Stabilität des Korrekturnetzwerks und der Ausgangssignalbewertung, eingehalten werden. Diese Bedingungen können erst nach Lösung der Polynomgleichung überprüft werden. Bei den durchgeführten Untersuchungen wurde deshalb auf eine Benutzung der Polynomgleichung zur Bestimmung des Korrekturnetzwerks verzichtet. Es wurden stattdessen feste Korrekturnetzwerke verwendet. Damit kam ein anderer Vorteil der in Abschnitt 4 entwickelten Struktur zur Wirkung, nämlich die direkte Beeinflussung des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Regelkreises ohne Beeinflussung der Zahl der zu schätzenden Koeffizienten für den Prädiktor. Für den ST-Regler mit Korrekturnetzwerk konnte damit das Korrekturnetzwerk, falls es notwendig war, auch relativ aufwendig gewählt werden. Der Regler für den ST-Regler mit Korrekturnetzwerk setzt sich für diesen Fall aus zwei Teilen zusammen, wobei der eine Teil aus der Identifikation

gewonnen wird und der andere Teil durch das Korrekturnetzwerk bestimmt ist und festliegt. Eine ähnliche Aufteilung ergibt sich für das Modell-Vergleichsverfahren (Hahn (1980); Hahn, Unbehauen (1982)), falls dieses Verfahren für eine Regelstrecke mit Korrekturnetzwerk angewendet wird.

Der Self Tuning-Regler mit Korrekturnetzwerk konnte nicht auf alle vorliegenden Testprozesse in gleicher Weise angewendet werden. Für Regelstrecken, die Pole sehr nahe am Punkt z = 1 des Einheitskreises besitzen, erweist sich der ST-Regler mit Korrekturnetzwerk bei gleichzeitiger Forderung nach statischer Genauigkeit als nicht brauchbar, da kein Korrekturnetzwerk angegeben werden kann, so daß das charakteristische Polynom relativ unempfindlich gegenüber Parameterschwankungen ist und gleichzeitig eine im Verhältnis zur Regelstrecke angemessene Dynamik erreicht wird.

Eine Untersuchung des ST-Reglers wurde in den in Tabelle 5.3.6 angegebenen Testprozessen mit den angegebenen Abtastzeiten durchgeführt.

Abtastzeit	0,5	1,0	2,5	4,0
TP 1	*	*	*	*
TP 2	-	*	-	-
TP 3	-	-	*	*
TP 4	-	*	*	*

Tabelle 5.3.6. Tabelle der bei verschiedenen Abtastzeiten untersuchten Testprozesse für das Verfahren STK

5.4. Anpassungsgeschwindigkeit

In diesem Abschnitt sollen die gewonnenen Erfahrungen bei der Anwendung der Verfahren dargestellt werden. Die wichtige Frage nach der Anpassungsgeschwindigkeit im Falle von Parameteränderungen soll

hier beantwortet werden. In den Tabellen 5.4.1 bis 5.4.30 wird ein Überblick über die Stelleistung und die Regelgüte und die jeweiligen vorgegebenen Spezifikationen der Übergangsfunktion gegeben. Bei den zugrundeliegenden Versuchen wurden im angepaßten Zustand für den Parametersatz b des jeweiligen Testprozesses die Parameter sprungförmig nach a umgeschaltet. Das Führungssignal wurde mittels eines Pseudo-random-binary(PRBS)-Signals sprungförmig geändert (dies ist in den Tabellen durch Δw gekennzeichnet). Die jeweiligen Kenngrößen wurden dann in Abhängigkeit von der Anzahl der Vorzeichenwechsel (VZW) dargestellt. Als Vergleich dienen die Kennwerte bei exakter Kenntnis des Streckenmodells. Nach Erreichen des angepaßten Zustands wurde eine sprungförmige Störgröße (Kennzeichnung Δz) am Streckeneingang aufgeschaltet, um das Verhalten des angepaßten Regelkreises zu untersuchen. Zur Untersuchung der Anpassungsgeschwindigkeit bei stochastischen Störungen wurde am Streckeneingang ein gaußverteiltes Rauschen mit der spektralen Leistungsdichte von $1 \cdot 10^{-1}$ V^2s und der Bandbreite von 62,5 Hz eingespeist. Nach Änderung der Parameter vom Wert b zum Wert a wurde die Führungsgröße ebenfalls mit einem PRBS-Signal sprungförmig geändert. Die jeweilige Regelgüte und Stelleistung werden im Vergleich zu den Werten bei exakter Kenntnis ebenfalls tabellarisch dargestellt (Kennzeichnung Δw_s). Die Anzahl der untersuchten Vorzeichenwechsel betrug in der Regel 50. Einige Untersuchungen wurden bereits vorher abgebrochen, da sich keine wesentliche Veränderung der Kennwerte mehr ergab.
Zur Veranschaulichung des Regelverhaltens sollen im folgenden noch einige Zeitverläufe von Stellsignal und Regelgröße für den Parametersatz a, siehe Bild 5.4.1 bis 5.4.20, dargestellt werden.

5.5. Beurteilung

Bei der Beurteilung der drei vorgestellten Verfahren anhand der vorliegenden Ergebnisse sind folgende Gesichtspunkte zu beachten:

Entwurfsaufwand:

Für Regelstrecken niedriger Ordnung kann mit den ST-Regelstrategien für Regelstrecken mit einer Nullstelle rechts oder links des Einheitskreises auf relativ einfache Weise eine gewünschte Führungsübertragungsfunktion erzwungen werden. Die Lage der Pole und der nichtminimalphasigen Nullstelle in der Führungsübertragungsfunktion wird berücksichtigt und ist problemlos, falls die Bedingungen gemäß Abschnitt 2 und 3 über die Lage der Nullstellen eingehalten werden.

Bei der ST-Regelstrategie mit Korrekturnetzwerk muß dieses Korrekturnetzwerk vorgegeben werden. Der Entwurf dieses Korrekturnetzwerks hängt von der Lage der Pole und Nullstellen ab und kann, falls ein Pol der Regelstrecke sehr nahe bei $z = 1$ liegt und das Korrekturnetzwerk eine Nullstelle bei $z = 1$ besitzt, die Anwendbarkeit des Verfahrens verhindern.

Anpassungsgeschwindigkeit:

Aufgrund der direkten Identifikation der Reglerparameter ist der Self-Tuning-Regler mit Korrekturnetzwerk den ST-Strategien für Regelstrecken mit einer Nullstelle rechts bzw. links des Einheitskreises überlegen. Diese Überlegenheit hängt allerdings auch damit zusammen, daß bei den ersten Verfahren eine definierte Übertragungsfunktion 2. Ordnung des geschlossenen Regelkreises vorgegeben wird. Diese einfache Übertragungsfunktion bewirkt, daß das Frequenzspektrum der zur Identifikation verwendeten Signale weniger anregend als beim Self Tuning-Regler mit Korrekturnetzwerk ist. Eine Erhöhung der Anpassungsgeschwindigkeit hätte durch einen kleineren Gewichtungsfaktor des Identifikationsverfahrens erreicht werden können. Auf diese Möglichkeit wurde allerdings im Rahmen dieser Untersuchung mit Ausnahme der Abtastzeit $T = 4$ s verzichtet, da eine optimale Anpassung des Gewichtungsfaktors nur im Einzelfall geschehen kann.

Entwurfskenngrößen:

Die beiden Self-Tuning-Regelstrategien für eine Nullstelle rechts bzw. links des Einheitskreises bieten die Möglichkeit, direkt Kenngrößen der Übergangsfunktion festzulegen. Damit kann der Entwurf den praktischen Erfordernissen leicht angepaßt werden. Der

Self-Tuning-Regler mit Korrekturnetzwerk dagegen entspricht einem Entwurf durch Polvorgabe, bei dem die Lage der Wurzeln des charakteristischen Polynoms festgelegt wird.

Stör- und Führungsverhalten:

Allen drei Entwürfen ist gemeinsam, daß eine bleibende Regelabweichung bei Führungsgrößenregelung vermieden wird. Bei Störungsregelung ist diese Eigenschaft nur bei den ST-Strategien für eine Regelstrecke mit einer Nullstelle rechts bzw. links des Einheitskreises vorhanden.

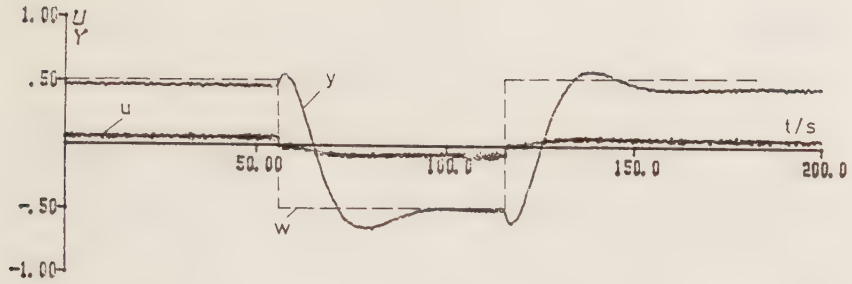

Bild 5.4.1. Führungsverhalten des Verfahrens ST-NSR
(TP 3, T = 0,5 s)

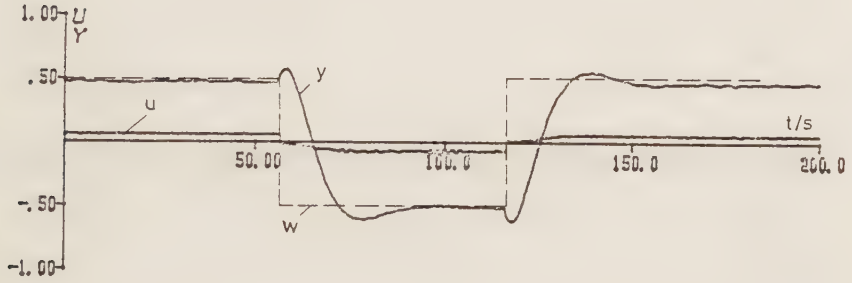

Bild 5.4.2. Führungsverhalten des Verfahrens ST-NSR
(TP 3, T = 1 s)

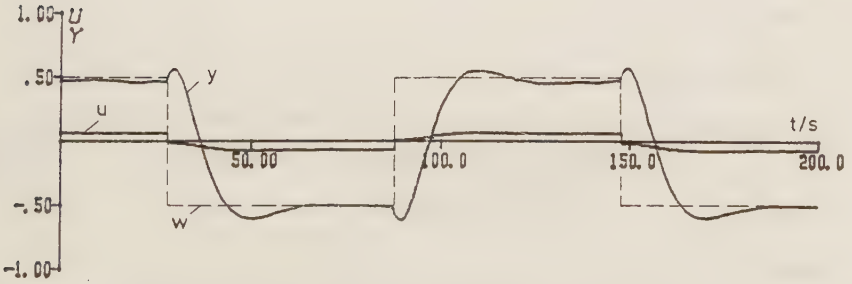

Bild 5.4.3. Führungsverhalten des Verfahrens ST-NSR
(TP 3, T = 2,5 s)

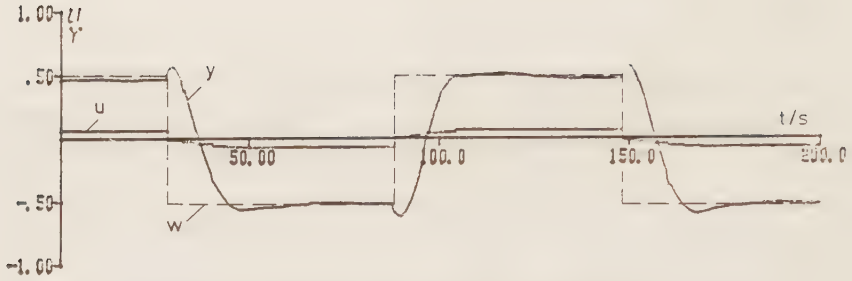

Bild 5.4.4. Führungsverhalten des Verfahrens ST-NSR (TP 3, T = 4 s)

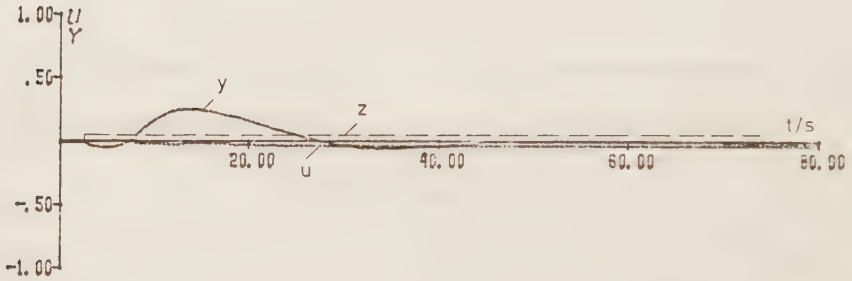

Bild 5.4.5. Störverhalten des Verfahrens ST-NSR bei deterministischer Störung am Streckeneingang (TP 4, T = 1 s)

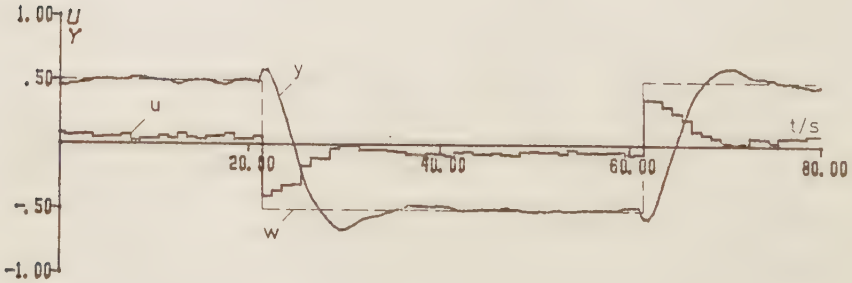

Bild 5.4.6. Führungsverhalten bei überlagerter stochastischer Störung des Verfahrens ST-NSR (TP 4, T = 1 s)

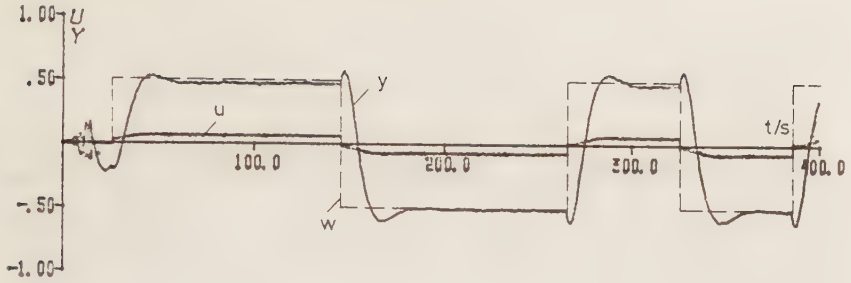

Bild 5.4.7. Adaptionsverhalten des Verfahrens ST-NSR nach Parameterumschaltung (TP 3, T = 1 s)

ⓐ

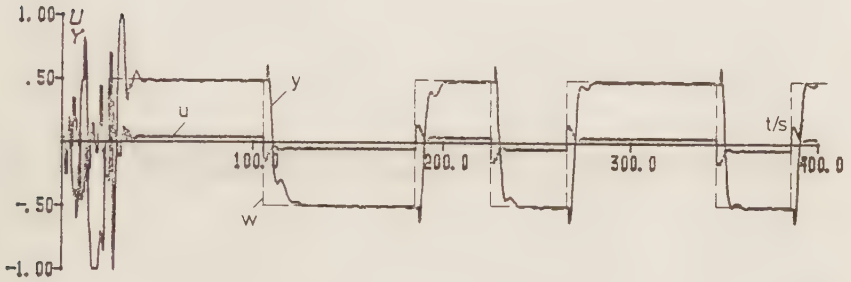

Bild 5.4.8 a. Adaptionsverhalten des Verfahrens ST-NSR nach Parameterumschaltung (TP 2, T = 1 s)

ⓑ

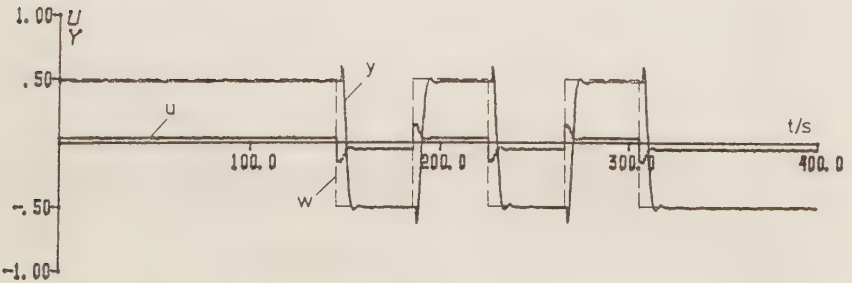

Bild 5.4.8 b. Fortsetzung

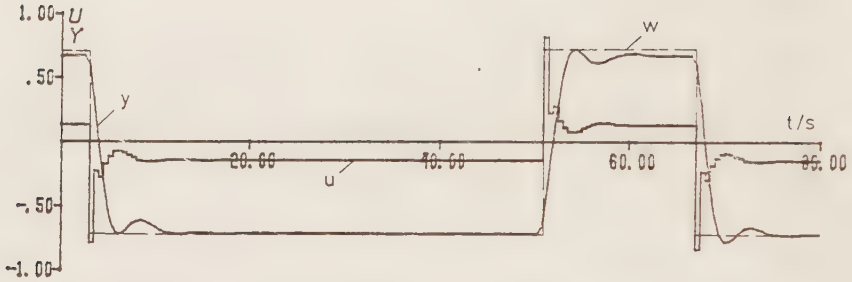

Bild 5.4.9. Führungsverhalten des Verfahrens ST-NSL
(TP 1, T = 0,5 s)

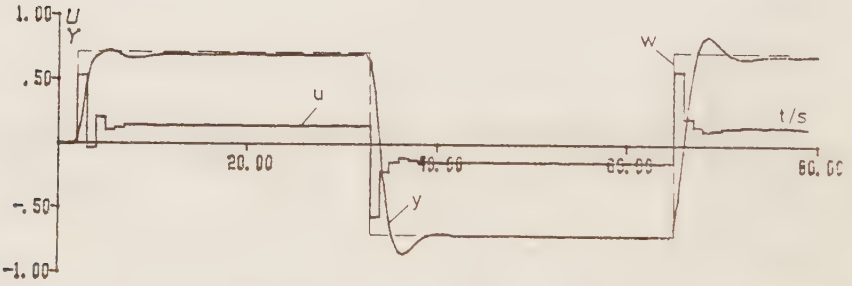

Bild 5.4.10. Führungsverhalten des Verfahrens ST-NSL
(TP 1, T = 1 s)

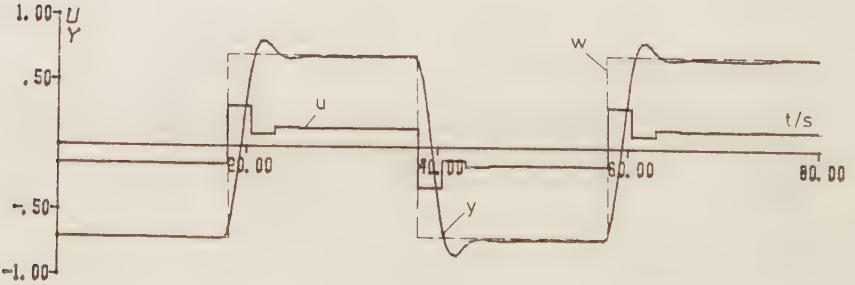

Bild 5.4.11. Führungsverhalten des Verfahrens ST-NSL
(TP 1, T = 2,5 s)

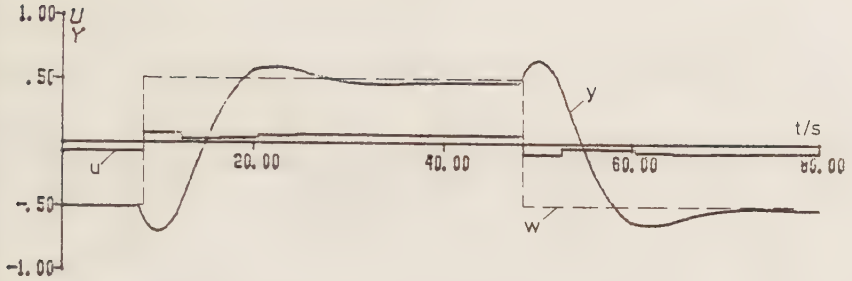

Bild 5.4.12. Führungsverhalten des Verfahrens ST-NSL (TP 3, T = 4 s)

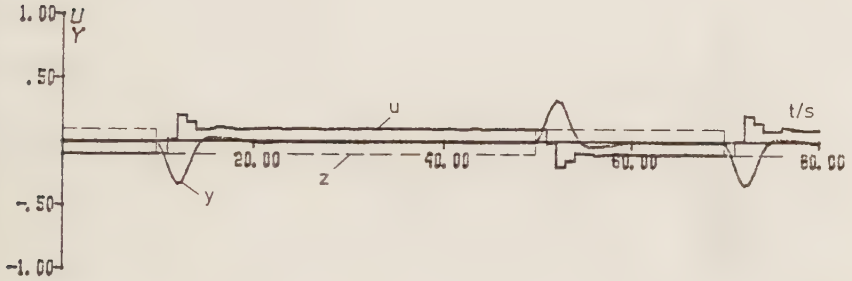

Bild 5.4.13. Störverhalten des Verfahrens ST-NSL bei deterministischer Störung am Streckeneingang (TP 1, T = 1 s)

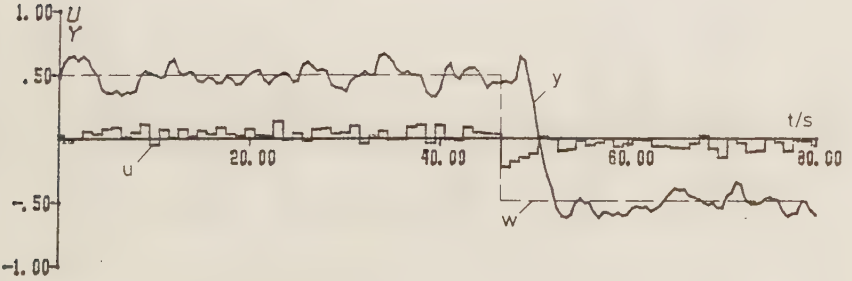

Bild 5.4.14. Führungsverhalten bei überlagerter stochastischer Störung des Verfahrens ST-NSL (TP 2, T = 1 s)

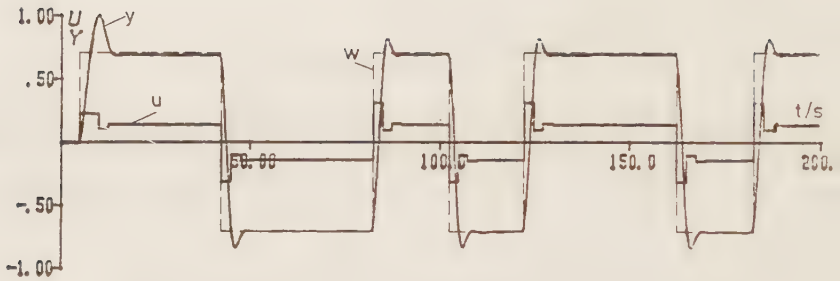

Bild 5.4.15. Adaptionsverhalten des Verfahrens ST-NSL nach Parameterumschaltung (TP 1, T = 2,5 s)

ⓐ

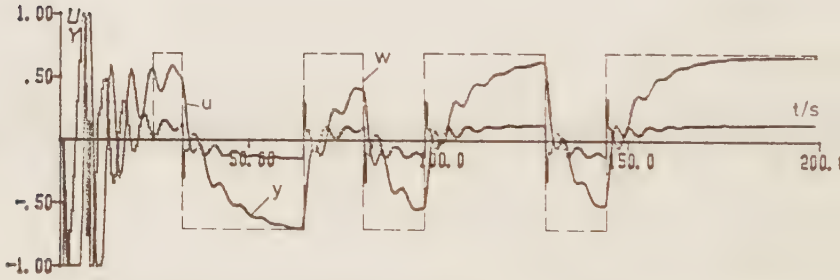

Bild 5.4.16 a. Adaptionsverhalten des Verfahrens ST-NSL nach Parameterumschaltung (TP 1, T = 0,5 s)

ⓑ

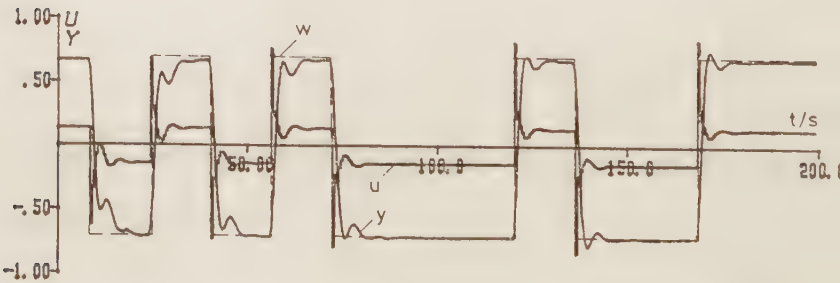

Bild 5.4.16 b. Fortsetzung

ⓐ

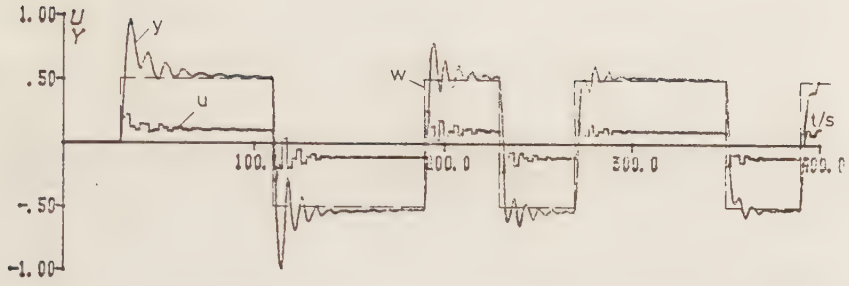

Bild 5.4.17a. Adaptionsverhalten des Verfahrens STK nach Parameteränderung (TP 1, T = 2,5 s)

ⓑ

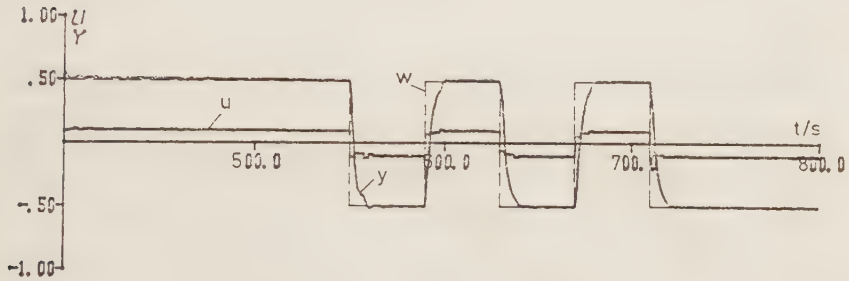

Bild 5.4.17b. Fortsetzung

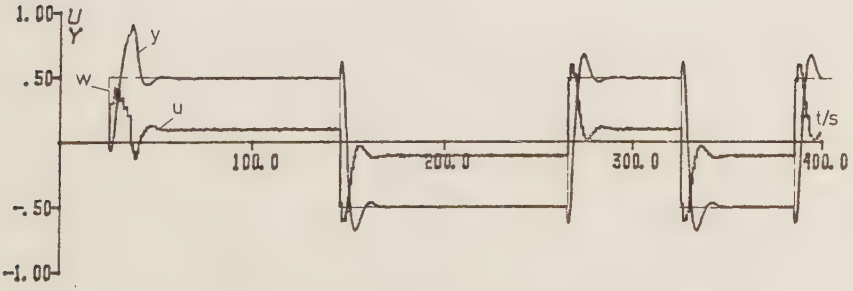

Bild 5.4.18. Adaptionsverhalten des Verfahrens STK nach Parameteränderung (TP 4, T = 1 s)

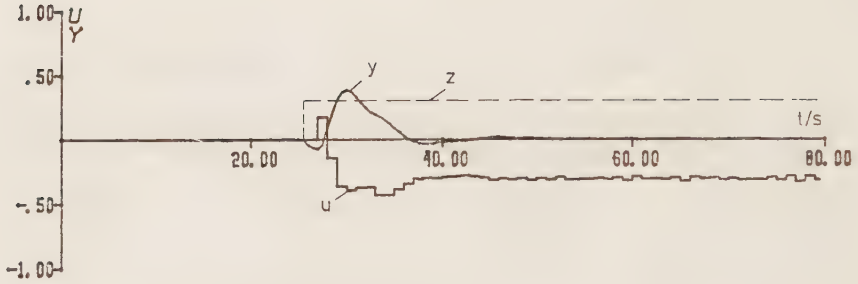

Bild 5.4.19. Störverhalten des Verfahrens STK bei deterministischer Störung am Streckeneingang (TP 4, T = 1 s)

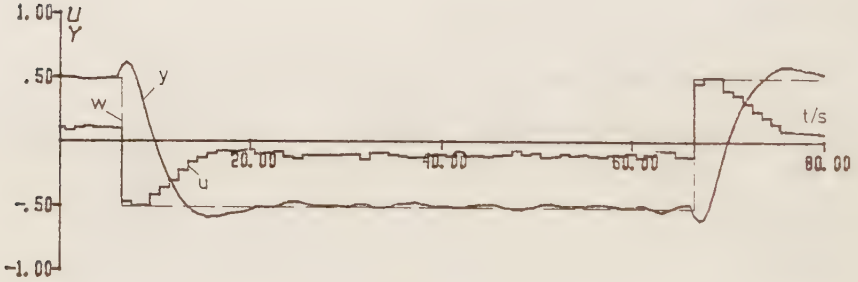

Bild 5.4.20. Führungsverhalten bei überlagerter stochastischer Störung des Verfahrens STK (TP 4, T = 1 s)

Sollwertänderung:

ST-NSR		T = 1 s		TP 2		Δw	
	exakt	adaptiv					
VZW	1	1	2	3	5	10	20
I_e	3,24	5,53	3,37	3,42	3,40	3,30	3,30
I_u	2,99	23,45	2,72	2,77	2,85	3,06	3,08
t_{max}	9,50	*	31,00	-	-	9,50	9,50
e_{max}	10,10	*	3,20	0	0	2,00	2,10
e_u	10,90	*	9,70	11,70	11,70	9,10	9,10

* Begrenzung wird erreicht

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSR		T = 1 s			TP 2		Δw_s	
	exakt	adaptiv						
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30
I_e	3,03	3,02	3,05	2,88	3,08	2,97	3,69	3,54
I_u	3,65	5,21	4,03	3,39	3,53	4,14	3,35	3,25

deterministische Störung:

ST-NSR	T = 1 s	TP 2	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	1,44		
e_{max}	56,00		
$t_{3\%}$	17,00		
I_u	2,98		

Tabelle 5.4.1. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 2 mit dem Verfahren ST-NSR (Abtastzeit T = 1 s)

Sollwertänderung:

ST-NSR	T = 2,5 s	TP 2	Δw			
	exakt	adaptiv				
VZW	1	1	2	3	5	10	20
I_e	3,41	3,21	3,39	3,55	3,57	3,42	3,41
I_u	1,57	2,97	1,66	1,00	1,46	1,43	1,45
t_{max}	16,00	25,00	16,00	16,00	16,00	16,00	16,00
e_{max}	11,00	11,70	13,40	7,20	7,80	10,50	9,60
e_u	3,30	5,80	3,70	7,20	7,40	3,30	3,70

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSR	T = 2,5 s	TP 2	Δw_s						
	exakt	adaptiv							
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	3,73	6,34	3,55	4,34	3,43	3,34	3,43	3,33	3,40	3,26
I_u	1,11	10,30	1,01	2,17	1,44	1,44	1,86	1,79	1,71	1,73

deterministische Störung:

ST-NSR	T = 2,5 s	Δz
	adaptiv
VZW	1
I_e	2,27
e_{max}	62,00
$t_{3\%}$	19,5
I_u	3,38

Tabelle 5.4.2. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 2 mit dem Verfahren ST-NSR (Abtastzeit T = 2,5 s)

Sollwertänderung:

ST-NSR		T = 0,5 s			TP 3		Δw		
	exakt	adaptiv							
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	4,05	4,60	4,14	4,36	4,39	4,14	4,15	4,14	4,12	4,11
I_u	1,65	2,90	1,67	1,91	1,95	1,74	1,65	1,71	1,72	1,72
t_{max}	22,50	-	22,00	23,00	23,50	23,50	23,00	22,00	22,50	21,50
e_{max}	11,10	-	17,20	9,90	10,50	14,40	14,80	14,40	14,00	14,20
e_u	6,50	7,30	5,00	10,90	10,90	5,60	5,80	5,50	5,30	4,70

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSR		T = 0,5 s			TP 3		Δw_s		
	exakt	adaptiv							
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	3,30	8,29	4,04	4,62	4,68	4,13	4,26	4,81	4,21	4,49
I_u	3,07	41,35	21,77	26,70	23,70	23,20	26,70	27,50	29,40	24,40

deterministische Störung:

ST-NSR	T = 0,5 s	TP 3	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	4,53		
e_{max}	73,00		
$t_{3\%}$	>35,00		
I_u	6,49		

Tabelle 5.4.3. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 3 mit dem Verfahren ST-NSR (Abtastzeit T = 0,5 s)

Sollwertänderung:

ST-NSR		T = 1 s			TP 3		Δw		
	exakt	adaptiv							
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	4,06	5,18	4,05	4,25	4,28	4,07	4,05	4,07	4,05	4,07
I_u	1,46	2,26	1,40	1,72	1,70	1,40	1,41	1,42	1,42	1,43
t_{max}	22,00	21,00	21,00	22,00	23,00	22,00	22,00	21,00	21,00	21,50
e_{max}	10,90	5,80	10,40	5,40	7,20	10,10	9,96	10,10	10,30	10,70
e_u	6,25	41,40	6,80	10,90	12,10	7,60	6,80	7,40	6,64	6,25

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSR		T = 1 s			TP 3		Δw_s			
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	3,86	4,53	4,17	5,00	5,00	4,50	4,60	4,60	3,80	4,05
I_u	3,76	20,90	8,96	8,60	10,10	9,80	8,00	9,50	10,20	7,73

deterministische Störung:

ST-NSR	T = 1 s	TP 3	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	2,16		
e_{max}	68,00		
$t_{3\%}$	>30,00		
I_u	4,56		

Tabelle 5.4.4. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 3 mit dem Verfahren ST-NSR (Abtastzeit T = 1 s)

Sollwertänderung:

ST-NSR		T = 2,5 s			TP 3			Δw		
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	4,07	12,57	4,08	4,28	4,24	4,01	4,06	4,09	4,06	4,07
I_u	1,40	18,20	1,71	1,92	1,84	1,36	1,41	1,43	1,42	1,41
t_{max}	21,00	-	27,50	27,50	27,50	21,50	22,50	22,50	22,50	21,50
e_{max}	11,50	-	23,50	0	0	7,00	10,10	10,50	10,30	11,10
e_u	6,40	-	6,80	12,30	11,90	6,80	6,80	7,40	6,25	6,80

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSR		T = 2,5 s			TP 3	Δw_s		
	exakt	adaptiv						
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30
I_e	4,18	5,17	4,59	4,41	4,72	4,44	4,18	4,01
I_u	2,12	3,25	2,52	2,38	2,41	2,28	2,11	2,21

deterministische Störung:

ST-NSR	T = 2,5 s	TP 3	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	4,39		
e_{max}	100,00		
$t_{3\%}$	>30,00		
I_u	4,17		

Tabelle 5.4.5. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 3 mit dem Verfahren ST-NSR (Abtastzeit T = 2,5 s)

Sollwertänderung:

ST-NSR		T = 4 s			TP 3			Δw		
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	4,10	6,84	4,03	4,30	4,21	4,08	4,07	4,05	3,91	4,05
I_u	1,46	3,75	1,23	1,76	1,65	1,44	1,45	1,41	1,48	1,44
t_{max}	22,00	-	20,50	22,00	21,50	22,00	22,00	21,50	20,00	21,50
e_{max}	11,10	100,00	11,50	6,25	6,60	10,50	9,30	11,10	6,40	10,00
e_u	6,60	53,00	7,40	11,30	9,30	6,60	6,40	6,60	6,00	6,00

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSR		T = 4s			TP 3		Δw_s	
	exakt	adaptiv						
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30
I_e	4,57	11,50	4,16	4,43	3,87	3,47	3,78	4,07
I_u	2,18	18,30	1,27	1,34	1,59	1,57	1,46	1,40

deterministische Störung:

ST-NSR	T = 4 s	TP 3	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	4,91		
e_{max}	118,00		
$t_{3\%}$	>30,00		
I_u	4,54		

Tabelle 5.4.6. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 3 mit dem Verfahren ST-NSR (Abtastzeit T = 4 s)

Sollwertänderung:

ST-NSR		T = 0,5 s			TP 4		Δw	
	exakt	adaptiv						
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30
I_e	2,66	3,11	2,51	2,54	2,50	2,41	2,42	2,15
I_u	5,53	5,32	5,17	4,89	5,10	5,26	5,28	4,73
t_{max}	9,50	14,50	11,00	10,50	10,00	10,50	10,50	9,50
e_{max}	12,50	10,50	16,80	12,10	13,70	16,60	16,60	16,00
e_{min}	7,80	11,30	5,80	12,70	12,70	8,60	9,20	6,80

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSR		T = 0,5 s			TP 4		Δw_s
	exakt	adaptiv					
VZW	1	1	2	3	5	10	20
I_e	2,96	3,19	2,54	2,74	2,59	2,75	2,73
I_u	5,30	4,15	4,12	4,29	4,06	4,48	4,55

deterministische Störung:

ST-NSR	T = 0,5 s	TP 4	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	4,06		
e_{max}	125,00		
$t_{3\%}$	>40s		
I_u	14,17		

Tabelle 5.4.7. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 4 mit dem Verfahren ST-NSR (Abtastzeit T = 0,5 s)

Sollwertänderung:

ST-NSR		T = 1 s		TP 4			Δw
	exakt	adaptiv					
VZW	1	1	2	3	5	10	20
I_e	2,97	3,14	2,47	2,54	2,58	2,45	2,43
I_u	5,32	4,18	4,39	5,10	4,98	5,30	5,30
t_{max}	10,00	13,00	11,50	9,00	9,50	9,50	9,00
e_{max}	7,80	9,40	7,40	7,60	8,60	12,90	13,00
e_{min}	11,70	8,90	5,40	12,10	11,90	7,80	7,20

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSR		T = 1 s		TP 4		Δw_s	
	exakt	adaptiv					
VZW	1	1	2	3	5	10	20
I_e	2,52	3,04	2,27	2,37	2,34	2,27	2,27
I_u	4,30	5,73	4,11	4,73	4,74	4,59	4,85

deterministische Störung:

ST-NSR	T = 1 s	TP 4	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	2,02		
e_{max}	53,00		
$t_{3\%}$	27,50		
I_u	3,30		

Tabelle 5.4.8. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 4 mit dem Verfahren ST-NSR (Abtastzeit T = 1 s)

Sollwertänderung:

ST-NSL		T = 0,5 s			TP 1			Δw		
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	1,52	1,43	1,36	1,45	1,46	1,40	1,40	1,43	-	1,48
I_u	0,74	2,30	2,08	1,87	1,60	1,30	1,10	1,10	0,95	0,93
t_{max}	4,00	-	-	-	-	-	13,00	3,50	4,00	4,00
e_{max}	11,90	0	0	0	0	0	2,40	3,40	6,70	8,30

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSL		T = 0,5 s			TP 1			Δw_s
	exakt	adaptiv						
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30
I_e	1,67	3,30	2,50	2,54	2,51	2,49	2,48	2,37
I_u	1,62	3,63	1,45	1,58	1,70	1,45	1,72	1,86

deterministische Störung:

ST-NSL	T = 0,5 s	TP 1	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	0,65		
e_{max}	33,00		
$t_{3\%}$	>14,50		
I_u	1,80		

Tabelle 5.4.9. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 1 mit dem Verfahren ST-NSL (Abtastzeit T = 0,5 s)

Sollwertänderung:

ST-NSL		T = 1 s			TP 1		Δw		
	exakt	adaptiv							
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	1,79	1,75	1,80	1,76	1,76	1,72	1,71	1,71	1,72	1,70
I_u	0,79	2,91	0,84	0,76	0,76	0,83	0,82	0,85	0,81	0,84
t_{max}	4,00	-	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00
e_{max}	8,9	-	9,20	7,30	7,30	9,70	9,43	10,10	9,10	9,98

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSL		T = 1 s			TP 1		Δw_s		
	exakt	adaptiv							
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40
I_e	1,56	2,02	8,12	1,67	1,53	1,56	1,53	1,49	1,58
I_u	1,26	1,13	27,14	3,20	2,73	1,79	1,16	1,25	1,37

deterministische Störung:

ST-NSL	T = 1 s	TP 1	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	0,62		
e_{max}	32,00		
$t_{3\%}$	8,00		
I_u	1,73		

Tabelle 5.4.10. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 1 mit dem Verfahren ST-NSL (Abtastzeit T = 1 s)

Sollwertänderung:

ST-NSL		T = 2,5 s			TP 1		Δw	
	exakt	adaptiv						
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30
I_e	1,60	1,72	1,65	1,61	1,66	1,62	2,35	1,61
I_u	0,82	2,37	2,09	1,32	0,62	0,65	0,66	0,64
t_{max}	3,50	8,00	3,00	8,00	8,00	8,00	8,00	8,00
e_{max}	7,00	16,60	15,50	7,00	18,00	3,80	3,80	3,80

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSL		T = 2,5 s		TP 1		Δw_s
	exakt	adaptiv				
VZW	1	1	2	3	5	10
I_e	1,77	4,90	4,16	3,59	3,57	3,76
I_u	1,47	4,49	2,43	0,93	0,97	1,42

deterministische Störung:

ST-NSL	T = 2,5 s TP 1 Δz
	adaptiv
VZW	1
I_e	1,35
e_{max}	58,00
$t_{3\%}$	>12,00
I_u	0,56

Tabelle 5.4.11. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 1 mit dem Verfahren ST-NSL (Abtastzeit T = 2,5 s)

Sollwertänderung:

ST-NSL	T = 1 s	TP 2	Δw			
	exakt	adaptiv				
VZW	1	1	2	3	5	10	20
I_e	3,11	3,21	3,08	3,14	3,15	3,08	3,08
I_u	3,93	3,82	4,09	3,82	3,82	4,05	4,10
t_{max}	8,00	8,00	8,00	8,00	8,00	8,00	8,00
e_{max}	7,80	8,20	10,50	8,60	8,80	10,30	10,30
e_{min}	15,60	17,90	15,00	17,20	17,20	14,60	15,20

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSL	T = 1 s	TP 2	Δw_s						
	exakt	adaptiv							
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	3,52	13,54	3,35	3,55	3,30	3,33	3,04	3,39	3,11	3,15
I_u	5,85	67,74	6,20	7,43	5,53	6,35	5,03	6,69	5,89	5,27

deterministische Störung:

ST-NSL	T = 1 s	TP 2	Δz
	adaptiv
VZW	1
I_e	1,31
e_{max}	55,00
$t_{3\%}$	12,00
I_u	2,63

Tabelle 5.4.12. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 2 mit dem Verfahren ST-NSL (Abtastzeit T = 1 s)

Sollwertänderung:

ST-NSL		T = 0,5 s			TP 3		Δw			
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	3,66	4,78	3,75	3,89	3,93	3,76	3,75	3,75	3,88	3,76
I_u	1,16	1,52	0,85	1,02	1,01	0,91	0,89	0,95	0,88	0,93
t_{max}	14,50	13,00	14,00	14,00	14,00	14,50	15,00	13,50	14,00	14,50
e_{max}	11,30	18,50	19,70	15,00	15,00	19,30	19,10	19,10	18,70	19,10
e_u	15,40	53,00	15,00	21,00	21,00	17,30	16,30	17,30	16,80	17,10

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSL		T = 0,5 s			TP 3		Δw_s			
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	4,36	6,92	3,52	3,65	4,67	4,56	S(z) wird			
I_u	4,33	15,85	7,37	11,99	13,34	47,03	Differenzierglied			

deterministische Störung:

ST-NSL	T = 0,5 s TP 3 Δz
	adaptiv
VZW	1
I_e	7,59
e_{max}	214,00
$t_{3\%}$	34,00
I_u	9,89

Tabelle 5.4.13. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 3 mit dem Verfahren ST-NSL (Abtastzeit T = 0,5 s)

Sollwertänderung:

ST-NSL		T = 1 s			TP 3		Δw		
	exakt	adaptiv							
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	3,45	3,70	3,75	3,86	3,76	3,74	3,74	3,73	3,74	3,74
I_u	0,92	1,20	1,03	1,15	1,12	1,01	1,05	1,00	1,04	1,04
t_{max}	15,00	13,00	14,00	15,00	15,00	14,00	15,00	15,00	14,50	14,00
e_{max}	10,50	7,00	11,70	9,70	9,50	11,50	12,10	12,10	12,10	12,80
e_u	17,18	24,60	18,50	21,20	17,90	18,00	17,50	18,30	18,30	18,10

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSL		T = 1 s			TP 3		Δw_s		
	exakt	adaptiv							
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	4,37	6,03	3,78	4,14	3,69	3,97	3,45	3,69	3,73	3,91
I_u	3,11	7,97	4,26	3,91	3,85	4,58	3,63	4,71	3,97	3,49

deterministische Störung:

ST-NSL	T = 1 s	TP 3	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	3,60		
e_{max}	78,00		
$t_{3\%}$	>40,00		
I_u	5,37		

Tabelle 5.4.14. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 3 mit dem Verfahren ST-NSL (Abtastzeit T = 1 s)

Sollwertänderung:

ST-NSL		T = 2,5 s			TP 3		Δw			
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	3,72	14,66	3,78	3,85	3,88	3,77	3,77	3,78	3,77	3,77
I_u	0,91	8,94	0,82	0,93	0,94	0,85	0,83	0,85	0,85	0,84
t_{max}	15,00	17,50	14,50	14,50	15,00	15,00	14,50	14,50	14,50	15,00
e_{max}	11,80	100,00	18,10	15,40	14,50	18,10	18,00	17,40	18,00	18,00
e_u	16,40	200,00	17,70	20,00	20,90	17,50	17,30	17,40	18,00	17,20

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSL		T = 2,5 s			TP 3			Δw_s		
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	3,69	4,45	3,66	3,56	4,10	3,92	3,87	3,68	4,00	3,56
I_u	1,10	9,71	2,74	1,61	2,11	1,57	1,84	1,83	2,14	1,69

deterministische Störung:

ST-NSL	T = 2,5 s TP 3 Δz
	adaptiv
VZW	1
I_e	4,03
e_{max}	105,00
$t_{3\%}$	>40,00
I_u	3,87

Tabelle 5.4.15. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 3 mit dem Verfahren ST-NSL (Abtastzeit T = 2,5 s)

Sollwertänderung:

ST-NSL		T = 4 s				TP 3		Δw		
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	3,80	14,70	3,89	3,95	3,93	3,79	3,77	3,77	3,79	3,75
I_u	0,85	13,60	1,22	1,07	1,04	0,89	0,88	0,87	0,86	0,89
t_{max}	15,00	-	12,00	13,00	13,00	13,50	14,50	14,00	14,00	14,00
e_{max}	10,50	instab.	33,00	13,00	13,20	15,20	13,50	13,20	13,50	13,60
e_u	18,40	-	17,50	20,70	19,70	16,00	15,50	15,40	16,00	15,20

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung

ST-NSL		T = 4 s				TP 3		Δw_s		
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	3,79	10,10	4,12	3,70	4,20	3,90	3,69	3,81	3,61	4,02
I_u	0,85	12,45	1,20	1,24	1,24	1,00	1,37	1,23	1,01	0,85

deterministische Störung:

ST-NSL	T = 4 s	TP 3	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	4,72		
e_{max}	118,00		
$t_{3\%}$	>40,00		
I_u	4,06		

Tabelle 5.4.16. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 3 mit dem Verfahren ST-NSL (Abtastzeit T = 4 s)

Sollwertänderung:

ST-NSL		T = 0,5 s			TP 4		Δw			
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	2,75	3,14	2,94	3,11	3,09	2,95	2,95	2,78	2,80	2,78
I_u	6,23	4,90	5,05	4,91	4,92	5,34	5,28	5,24	5,31	5,23
t_{max}	8,50	13,00	13,50	13,50	13,00	12,00	12,50	12,00	12,00	12,00
e_{max}	11,70	12,10	17,70	13,60	13,50	18,50	18,90	20,00	21,00	20,80
e_{min}	10,70	10,00	5,00	10,00	9,70	5,20	5,20	5,00	5,00	5,00

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSL		T = 0,5 s			TP 4		Δw_s			
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	2,89	3,03	2,98	3,01	3,00	2,99	3,01	2,98	2,97	2,98
I_u	6,54	6,41	5,68	5,77	5,49	5,69	5,65	5,71	5,50	5,85

deterministische Störung:

ST-NSL	T = 0,5 s	TP 4	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	1,08		
e_{max}	25,70		
$t_{3\%}$	32,50		
I_u	2,47		

Tabelle 5.4.17. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 4 mit dem Verfahren ST-NSL (Abtastzeit T = 0,5 s)

Sollwertänderung:

ST-NSL		T = 1 s			TP 4		Δw			
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	2,85	3,18	2,95	3,08	2,82	2,74	2,75	2,75	2,76	2,76
I_u	6,25	4,31	4,40	4,02	6,95	6,17	6,21	6,24	6,25	6,23
t_{max}	9,00	13,50	15,50	15,50	7,50	9,00	9,00	9,00	9,00	9,00
e_{max}	8,20	10,10	13,60	8,00	12,50	11,50	11,50	11,70	12,10	12,10
e_{min}	14,00	9,00	5,00	11,90	16,60	10,70	10,90	10,70	11,30	10,90

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSL		T = 1 s			TP 4		Δw_s			
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	2,91	3,09	3,03	3,03	3,02	3,01	2,87	2,86	2,81	2,81
I_u	6,52	4,79	4,66	4,43	4,38	4,58	4,61	4,55	4,34	4,44

deterministische Störung:

ST-NSL	T = 1 s	TP 4	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	1,01		
e_{max}	30,80		
$t_{3\%}$	14,00		
I_u	3,14		

Tabelle 5.4.18. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 4 mit dem Verfahren ST-NSL (Abtastzeit T = 1 s)

Sollwertänderung:

ST-NSL		T = 2,5 s			TP 4			Δw		
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	2,78	3,19	2,95	3,14	3,12	2,95	2,97	2,94	2,93	2,92
I_u	6,44	8,94	3,64	3,27	3,33	3,69	3,69	3,72	3,69	3,86
t_{max}	9,00	31,00	20,50	21,50	21,50	20,50	21,00	20,50	21,00	19,50
e_{max}	10,90	14,40	7,80	3,50	4,10	6,20	6,80	7,20	6,80	5,40
e_u	14,40	8,90	6,80	12,10	11,70	7,80	8,40	7,40	7,00	8,20

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSL	T = 2,5s	TP 4	Δw_s		
	exakt	adaptiv			
VZW	1	1	2	3	5
I_e	2,86	3,10	3,01	2,80	2,78
I_u	6,54	5,93	12,40	5,81	6,47

deterministische Störung:

ST-NSL	T = 2,5 s	TP 4	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	1,84		
e_{max}	40,00		
$t_{3\%}$	19,00		
I_u	3,83		

Tabelle 5.4.19. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 4 mit dem Verfahren ST-NSL (Abtastzeit T = 2,5 s)

Sollwertänderung:

ST-NSL		T = 4 s			TP 4		Δw			
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	2,79	6,61	2,75	2,78	2,77	2,70	2,72	2,72	2,72	2,72
I_u	7,36	30,55	7,85	7,72	7,52	7,58	7,57	7,59	7,59	7,58
t_{max}	9,00	15,50	6,00	6,00	9,00	9,50	9,50	9,50	9,50	9,50
e_{max}	10,90	100,00	13,50	11,90	10,50	14,20	14,40	14,40	14,25	14,80
e_{min}	17,20	50,00	16,20	17,60	16,90	13,80	14,40	14,40	14,40	14,00

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

ST-NSL		T = 4 s			TP 4		Δw_s			
	exakt	adaptiv								
VZW	1	1	2	3	5	10	20	30	40	50
I_e	2,70	7,29	2,74	2,72	2,72	2,80	2,89	2,64	2,75	2,72
I_u	7,28	23,70	7,09	6,95	6,95	7,80	9 84	7,23	7,66	7,42

deterministische Störung:

ST-NSL	T = 4 s	TP 4	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	1,57		
e_{max}	36 %		
$t_{3\%}$	>40		
I_u	7,87		

Tabelle 5.4.20. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 4 mit dem Verfahren ST-NSL (Abtastzeit T = 4 s)

Sollwertänderung:

STK T = 0,5 s TP 1 Δw					
	exakt	adaptiv			
VZW	1	1	2	3	5
I_e	2,74	2,95	2,72	2,86	2,87
I_u	2,09	2,37	2,06	2,24	2,25
t_{max}	-	-	-	-	-
e_{max}	-	-	-	-	-

Beim Entwurf für den exakten Regler wurde C(z) berücksichtigt.

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

STK T = 0,5s TP 1 Δw_s					
	exakt	adaptiv			
VZW	1	1	2	3	5
I_e	2,82	2,82	2,74	2,86	2,85
I_u	2,40	3,01	2,14	2,30	2,15

deterministische Störung:

STK T = 0,5 s TP 1 Δz	
	adaptiv
VZW	1
I_e	0,61
e_{max}	28,00
$t_{3\%}$	5,00
I_u	5,47

Tabelle 5.4.21. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 1 mit dem Verfahren STK (Abtastzeit T = 0,5 s)

Sollwertänderung:

STK		T = 1 s		TP 1		Δw	
	exakt	adaptiv					
VZW	1	1	2	3	5	10	20
I_e	3,80	3,33	2,95	3,08	2,92	2,58	3,11
I_u	3,31	2,57	2,02	2,18	1,94	1,45	1,70
t_{max}	-	-	-	-	-	-	-
e_{max}	-	-	-	-	-	-	-

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

STK		T = 1 s		TP 1		Δw_s	
	exakt	adaptiv					
VZW	1	1	2	3	5	10	20
I_e	3,66	3,27	3,40	3,45	3,46	3,41	3,27
I_u	3,23	3,06	3,11	2,73	2,67	2,84	2,72

deterministische Störung:

STK	T = 1 s	TP 1	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	2,12		
e_{max}	50,10		
$t_{3\%}$	30,00		
I_u	2,65		

Tabelle 5.4.22. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 1 mit dem Verfahren STK (Abtastzeit T = 1 s)

Sollwertänderung:

STK		T = 2,5 s		TP 1		Δw	
	exakt	adaptiv					
VZW	1	1	2	3	5	10	20
I_e	3,74	4,49	3,77	3,68	3,70	3,79	3,80
I_u	3,11	5,02	4,51	3,98	3,51	3,15	3,17
t_{max}	-	10,50	9,50	9,50	15,50	-	-
e_{max}	-	9,30	48,00	28,70	11,00	-	-

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

STK		T = 2,5 s		TP 1		Δw_s	
	exakt	adaptiv					
VZW	1	1	2	3	5	10	20
I_e	3,78	5,06	3,73	3,70	3,69	3,80	3,84
I_u	3,18	5,82	4,58	4,13	3,28	3,19	3,20

deterministische Störung:

STK	T = 2,5 s TP 1 Δz
	adaptiv
VZW	1
I_e	1,99
e_{max}	61,20
$t_{3\%}$	27,00
I_u	3,63

Tabelle 5.4.23. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 1 mit dem Verfahren STK (Abtastzeit T = 2,5 s)

Sollwertänderung:

STK		T = 4 s		TP 1		Δw	
	exakt	adaptiv					
VZW	1	1	2	3	5	10	20
I_e	4,40	7,20	4,58	4,50	4,57	4,33	4,41
I_u	3,80	11,40	4,95	5,08	4,52	3,82	3,81
t_{max}	-	-	-	-	-	-	-
e_{max}	-	100,00	50,00	50,00	35,80	3,00	-

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

STK		T = 4 s		TP 1		Δw_s	
	exakt	adaptiv					
VZW	1	1					
I_e	4,44	7,11	4,78	4,59	4,72	4,40	4,39
I_u	3,81	11,40	5,15	4,90	4,67	3,88	3,90

deterministische Störung:

STK	T = 4 s TP 1 Δz
	adaptiv
VZW	1
I_e	2,85
e_{max}	83,00
$t_{3\%}$	32,50
I_u	4,15

Tabelle 5.4.24. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 1 mit dem Verfahren STK (Abtastzeit T = 4 s)

Sollwertänderung:

STK		T = 1 s			TP 2		Δw
	exakt	adaptiv					
VZW	1	1	2	3	5	10	20
I_e	4,25	3,73	3,96	3,85	3,84	4,02	3,98
I_u	3,47	3,70	3,51	3,65	3,69	3,60	3,47
t_{max}	21,00	14,50	16,50	16,50	16,50	16,50	16,50
e_{max}	25,40	37,00	32,00	40,00	38,00	35,40	33,20
e_u	-	4,50	4,50	-	-	5,60	5,00

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

Regelung nicht möglich.

deterministische Störung:

STK	T = 1 s TP 2 Δz
	adaptiv
VZW	1
I_e	3,40
e_{max}	78,00
$t_{3\%}$	>35,00
I_u	4,23

Tabelle 5.4.25. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 2 mit dem Verfahren STK (Abtastzeit T = 1 s)

Sollwertänderung:

	STK	T = 2,5 s		TP 3	Δw
	exakt	adaptiv			
VZW	1	1	2	3	5
I_e	4,33	5,93	4,45	5,29	5,22
I_u	2,87	4,11	4,33	4,18	3,81
t_{max}	-	-	-	-	-
e_{max}	-	59,00	-	-	-
e_u	-	-	-	-	-

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

	STK	T = 2,5 s		TP 3	Δw_s
	exakt	adaptiv			
VZW	1	1	2	3	5
I_e	4,18	7,33	4,80	4,89	5,17
I_u	3,08	7,65	3,71	4,97	4,68

deterministische Störung:

STK	T = 2,5 s	TP 3	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e e_{max} $t_{3\%}$ I_u	Zu hohe Stellbewertung. Keine Ausregelung möglich.		

Tabelle 5.4.26. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 3 mit dem Verfahren STK (Abtastzeit T = 2,5 s)

Sollwertänderung:

	STK	T = 4 s	TP 3	Δw
	exakt	adaptiv		
VZW	1	1	2	3
I_e	4,67	10,90	5,19	5,77
I_u	3,47	14,90	3,46	3,90
t_{max}	-	-	-	-
e_{max}	-	-	-	-
e_u	-	-	-	-

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

	STK	T = 4 s	TP 3		Δw_s
	exakt	adaptiv			
VZW	1	1	2	3	5
I_e	4,55	7,74	4,53	5,90	6,57
I_u	3,42	6,38	3,34	4,32	5,29

deterministische Störung:

STK	T = 4 s	TP 3	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	11,70		
e_{max}	117,00		
$t_{3\%}$	>75,00		
I_u	11,60		

Tabelle 5.4.27. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 3 mit dem Verfahren STK (Abtastzeit T = 4 s)

Sollwertänderung:

STK T = 1 s TP 4 Δw						
	exakt	adaptiv				
VZW	1	1	2	3	5	10
I_e	3,00	3,97	3,00	3,00	3,01	3,00
I_u	6,68	11,01	6,96	6,94	6,92	6,99
t_{max}	9,00	12,50	9,00	9,00	9,00	9,00
e_{max}	15,80	81,00	17,90	18,00	18,00	18,60
e_u	11,70	12,50	11,70	12,70	12,50	11,90

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

STK T = 1 s TP 4 Δw_s						
	exakt	adaptiv				
VZW	1	1	2	3	5	10
I_e	2,87	3,06	3,22	3,02	3,01	3,01
I_u	6,56	5,22	4,13	5,52	5,70	5,97

deterministische Störung:

STK T = 1 s TP 4 Δz	
	adaptiv
VZW	1
I_e	0,69
e_{max}	26,90
$t_{3\%}$	14,50
I_u	3,32

Tabelle 5.4.28. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 4 mit dem Verfahren STK (Abtastzeit T = 1 s)

Sollwertänderung:

STK	T = 2,5 s	TP 4		Δw		
	exakt	adaptiv				
VZW	1	1	2	3	5	10	20
I_e	3,76	4,06	3,87	3,87	3,89	3,85	3,85
I_u	2,32	4,07	2,13	2,26	2,23	2,12	2,13
t_{max}	-	-	-	-	-	-	-
e_{max}	-	0	2,00	1,30	1,00	1,30	1,00
e_u	4,30	3,50	3,30	3,30	3,70	3,00	3,30

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

STK	T = 2,5 s	TP 4		Δw_s		
	exakt	adaptiv				
VZW	1	1	2	3	5	10
I_e	3,79	4,17	4,49	4,55	4,53	4,35
I_u	3,43	2,96	2,09	2,25	2,28	2,94

deterministische Störung:

STK	T = 2,5 s	TP 4	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	2,40		
e_{max}	51,30		
$t_{3\%}$	>35,00		
I_u	3,56		

Tabelle 5.4.29. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 4 mit dem Verfahren STK (Abtastzeit T = 2,5 s)

Sollwertänderung:

STK	T = 4,0 s	TP 4	Δw				
	exakt	adaptiv					
VZW	1	1	2	3	5	10	20
I_e	4,23	5,50	4,52	4,65	4,58	4,47	4,49
I_u	2,23	5,45	2,44	2,68	2,66	2,39	2,46
t_{max}	–	–	–	–	–	–	–
e_{max}	–	–	–	–	–	–	–
e_u	–	–	–	–	–	–	–

Sollwertänderung bei überlagerter stochastischer Störung:

STK	T = 4 s	TP 4	Δw_s				
	exakt	adaptiv					
VZW	1	1	2	3	5	10	20
I_e	4,39	4,87	4,47	4,70	4,58	4,42	4,43
I_u	2,15	4,18	2,55	2,59	2,66	2,43	2,50

deterministische Störung:

STK	T = 4 s	TP 4	Δz
	adaptiv		
VZW	1		
I_e	2,02		
e_{max}	0,56		
$t_{3\%}$	>35,00		
I_u	3,69		

Tabelle 5.4.30. Gütemaße der Regelung des Testprozesses TP 4 mit dem Verfahren STK (Abtastzeit T = 4 s)

6. Zusammenfassung

Es werden drei Self-Tuning-Strategien für diskrete nichtminimalphasige Regelstrecken, d. h. Regelstrecken mit Nullstellen außerhalb des Einheitskreises, vorgestellt.

Bei der ersten Self-Tuning-Strategie für Regelstrecken mit einer Nullstelle rechts des Einheitskreises - dies entspricht im Kontinuierlichen einer Regelstrecke mit Allpaßanteil - wird, um ein beschränktes Stellsignal zu garantieren, die nichtminimalphasige Nullstelle als Bestandteil der Führungsübertragungsfunktion betrachtet. Der Entwurf geht von den Kenndaten der Übergangsfunktion eines PT_2S-Glieds mit einer Nullstelle rechts des Einheitskreises aus. Aufgrund der Vorgabe des maximalen Unter- und Überschwingens wird die Lage des konjugiert komplexen Polpaares berechnet. Dieser Entwurf wird mit einem Parameterschätzverfahren zu einer Self-Tuning-Strategie kombiniert. Durch diese Kombination kann gesichert werden, daß bei sich ändernden Parametern der Regelstrecke bzw. bei sich ändernder nichtminimalphasiger Nullstelle die vorgegebenen Kenngrößen eingehalten werden können. Diese Self-Tuning-Strategie kann auf eine Reihe von technischen Prozessen, wie Wasserkraftwerke, Hochöfen oder Schiffe, deren Parameter sich im laufenden Betrieb ändern, angewandt werden.

Beim zweiten Verfahren, der Self-Tuning-Strategie für Regelstrecken mit einer Nullstelle links des Einheitskreises, wird die nichtminimalphasige Nullstelle ebenfalls als Bestandteil der Führungsübertragungsfunktion betrachtet. Der Entwurf geht ebenfalls von den Kenndaten der Übergangsfunktion eines PT_2S-Glieds mit einer Nullstelle links des Einheitskreises aus. Eine Nullstelle links tritt sehr häufig bei der z-Transformation von Tiefpaßsystemen höherer Ordnung auf. Es wird ein Algorithmus angegeben, mit dem aufgrund der Vorgabe des maximalen Überschwingens und der Zeit bis zum Erreichen des maximalen Überschwingens die Lage des konjugiert komplexen Polpaares berechnet werden kann. Durch Kombination

mit einem Parameterschätzverfahren ergibt sich eine Self-Tuning-Strategie, die die Einhaltung der gewünschten Spezifikationen der Übergangsfunktionen möglich macht.

Beiden Verfahren ist gemeinsam, daß der Einfluß der variierenden Nullstelle der Regelstrecke, der bei den bisher gebräuchlichen Entwürfen unberücksichtigt blieb, sehr stark vermindert wird.

Bei der dritten Self-Tuning-Regelstrategie wird der Grundgedanke des Korrekturnetzwerks zur Sicherung eines beschränkten Stellsignals benutzt. Durch die Verwendung eines Korrekturnetzwerks zusammen mit der Struktur des von Clarke und Gawthrop vorgeschlagenen erweiterten Self Tuning-Reglers konnte eine neue Self-Tuning-Strategie entwickelt werden, bei der einerseits die Nichtminimalphasigkeit beseitigt und andererseits im Gegensatz zu früheren Vorschlägen eine Erhöhung der zu schätzenden Parameter der Regelstrecke vermieden werden kann. Gleichzeitig konnte gezeigt werden, daß bei der vorgeschlagenen Struktur das charakteristische Polynom nur von der Regelstrecke und vom Korrekturnetzwerk abhängt. Eine Beeinflussung der Störübertragungsfunktion ist durch eine zusätzliche Bewertung der Regelgröße ebenfalls möglich. In Kombination mit einem Parameterschätzverfahren ergibt sich eine leistungsfähige Self-Tuning-Regelstrategie.

Simulationen mit vier Testprozessen zeigen gute Resultate.

LITERATUR

Åström, K.J. (1970), Introduction to stochastic control theory, New York.

Åström, K.J. (1978), Stochastic control problems in "Lecture Notes in mathematics", Bd. 680, Berlin, Mathematical Control Theory Proceedings, Canberra, Australia, 23. August - 2. September 1977, S. 1-67.

Åström, K.J. (1979a), Algebraic system theory as a tool for regulator design in Acta Polytechnica Scandinavia, Ma 31, Helsinki: Topics in System Theory, Publication in honour of Professor Hans Blomberg on the occasion of his sixtieth birthday on December 18th, S. 52-65.

Åström, K.J. (1979b), Simple self tuners I, CODEN: LUTFD1/TFRT-7184/1-63, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Schweden.

Åström, K.J. (1980), Design principles for self tuning regulators, Proceedings of an International Symposium Bochum, Methods and Applications in Adaptive Control, Berlin.

Åström, K.J., Borisson, U., Ljung, L., Wittenmark, B. (1977), Theory and applications of self tuning regulators, Automatica, 13, S. 467-476.

Åström, K.J., Westerberg, B., Wittenmark, B. (1978), Self-tuning controllers based on pole placement design, CODEN: LUTFD2/TRFT-3148/1-52, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Schweden.

Åström, K.J., Wittenmark, B. (1971), Problems of identification and control, Journal of mathematical analysis and applications, 34, S. 90-113.

Åström, K.J., Wittenmark, B. (1972), On the control of constant but unknown systems, 5th IFAC World Congress, Paris, paper 37.5.

Åström, K.J., Wittenmark, B. (1973), On self tuning regulators, Automatica, 9, S. 185-199.

Borisson, U., Syding, R. (1976), Self tuning control of an ore crusher, Automatica, 12, S. 1-7.

Borisson, U., Wittenmark, B. (1974), An industrial application of a self tuning regulator, IFAC Symposium on digital computer applications to process control, Zürich.

Cegrell, T., Hedqvist, T. (1974), A new approach to continuous digester control, IFAC Symposium on Digital Computer Applications to Process Control, Zürich.

Clarke, D.W., Cope, S.N., Gawthrop, P.J. (1975), Feasibility study of the application of microprocessors to self-tuning controllers, University of Oxford.

Clarke, D.W., Gawthrop, P.J. (1975), Self tuning controller, Proc. IEE, 122, Nr. 9, S. 929-934.

Clarke, D.W., Gawthrop, P.J. (1979a), Self-tuning control, Proc. IEE, 126, Nr. 6, S. 633-640.

Clarke, D.W., Gawthrop, P.J. (1979b), Implementation and application of microprocessor based self tuners, 5th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Darmstadt, S. 197-208.

Clarke, D.W., Hastings-James, R. (1971), Design of digital controllers for randomly disturbed systems, Proc. IEE, 118, Nr. 10, S. 1503-1506.

Cordero, A.O. (1979), Theoretical study of a self tuning regulator with variable forgetting factor, M. Sc. thesis, Imperial College London, Department of computing and control, control systems section.

Diekmann, K. (1981), Die Identifikation von Mehrgrößensystemen mit Hilfe rekursiver Parameterschätzverfahren, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.

Egardt, B. (1979), Stability of adaptive controllers, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 20, Berlin.

Fortescue, T.R., Kershenbaum, L.S., Ydstie, B.R. (1977), Implementation of self tuning regulators with variable forgetting factors, Department of chemical Technology, Imperial College, London SW7.

Fresewinkel, T. (1981), Modifikation eines adaptiven Kompensationsreglers für die Regelung diskreter nichtminimalphasiger Strecken, Studienarbeit ESR-8016, Ruhr-Universität Bochum.

Gawthrop, P.J. (1977), Some interpretations of the self-tuning controllers, Proc. IEE, 124, Nr. 10, S. 889-894.

Gawthrop, P.J. (1979), On the stability and convergence of a self tuning controller, O.U.E.L. report 1293/79, University of Oxford.

Hahn, V. (1980), Eine Möglichkeit zur Erweiterung adaptiver Kompensationsregler für die Regelung nichtminimalphasiger Regelstrecken, Interner Bericht ESR-8006, Ruhr-Universität Bochum.

Hahn, V., Unbehauen, H. (1982), Direct adaptive control of nonminimum phase systems, IEEE Conference on applications of adaptive and multivariable control, 19.-21. Juli 1982, Hull, England.

5th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Darmstadt (1979).

Kallström, C.G., Åström, K.J., Thorell, N.E., Eriksson, J., Sten, L. (1978), Adaptive autopilots for steering of large tankers, 7th IFAC World Congress, Helsinki.

Korecky, W. (1980), Integration von Self Tuning-Reglern in ein DDC-System für Mikrorechner, Diplomarbeit ESR-8009, Ruhr-Universität Bochum.

Landgraf-Schneider (1970), Elemente der Regelungstechnik, Berlin.

Lindorff, D. (1965), Theory of sampled data control systems, New York.

Ljung, L. (1977a), On positive real transfer functions and the convergence of some recursive schemes, IEEE, AC 22, Nr. 4, S. 539-551.

Ljung, L. (1977b), Analysis of recursive stochastic algorithms, IEEE, AC 22, Nr. 4, S. 551-575.

Ljung, L., Wittenmark, B. (1974), Asymptotic properties of self tuning regulators, Report 7404, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Schweden.

MacGregor, J., Tidwell, P.W. (1977), Discrete stochastic control with input constraints, Proc. IEE, 124, Nr. 8, S. 732-734.

Nöth, G. (1981), Zur Synthese von diskreten PT_2S-Gliedern mit einer Nullstelle rechts des Einheitskreises, Interner Bericht ESR-8101, Ruhr-Universität Bochum.

Peterka, V. (1972), On steady state minimum variance control strategy, Kybernetica, 8, S. 219-232.

Peterka, V. (1975), A square-root filter for real-time multivariable regression, Kybernetica, 11, S. 53-67.

Schmid, Chr. (1979), Ein Beitrag zur Realisierung adaptiver Regelungssysteme mit dem Prozeßrechner, Dissertation Ruhr-Universität Bochum.

Schmid, Chr., Unbehauen, H. (1979), Identification and CAD of adaptive systems using the KEDDC package, 5th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, 24.-28.8.1979, Darmstadt.

Schwarz, B. (1980), Statistische Modellbildung und Regelung eines Hochofens, Diplomarbeit ESR-8013, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum.

Stürz, U. (1980), Entwicklung eines diskreten adaptiven Kompensationsreglers für nichtminimalphasige Strecken niedriger Ordnung, Diplomarbeit ESR-8020, Ruhr-Universität Bochum.

Unbehauen, H. (1979), Regelungstechnik I, Vorlesungsmanuskript SS 1979, Ruhr-Universität Bochum.

Unbehauen, H. (1980), ed., Methods and applications in adaptive control, Proceedings of an International Symposium Bochum, Methods and Applications in Adaptive Control, Berlin.

Unbehauen, H., Göhring, B., Bauer, B. (1974), Parameterschätzverfahren zur Systemidentifikation, München.

Weber, W. (1967), Ein systematisches Verfahren zum Entwurf linearer und adaptiver Regelungssysteme, ETZ-A, 88, S. 138-144.

Wittenmark, B. (1973), A self tuning regulator, Report 7311, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Schweden.

Wittenmark, B., Åström, K.J. (1980), Simple self tuning controllers, Proceedings of an International Symposium Bochum, Methods and Applications in Adaptive Control, Berlin.

Anhang A.1. Der Minimum-Varianz-Regler

Sehr viele technische, physikalische oder ökonomische Prozesse können aufgrund ihrer stochastischen Eigenschaften nicht mehr als rein deterministische Prozesse, sondern müssen als "stochastische Prozesse" beschrieben werden.

Für viele Anwendungen, gerade auch der Regelungstechnik, kann die Klasse der stochastischen Prozesse sehr stark eingeschränkt werden. Sehr oft lassen sich die stochastischen Eigenschaften eines Prozesses durch einen stationären ergodischen Prozeß mit rationalem Spektrum annähern. Bei diskreter Beschreibung werden diese Prozesse meist durch ein "ARMA-Modell" (auto-regressive-moving average) (siehe z. B. Åström (1970)) beschrieben. Jedes stationäre farbige Rauschen mit rationalem Spektrum kann bekanntlich durch ein stabiles Filter auf diskretes weißes (0,1) normalverteiltes Rauschen zurückgeführt werden. Die Übertragungsfunktion des Filters ist asymptotisch stabil und besitzt keine Nullstellen außerhalb des Einheitskreises in z.

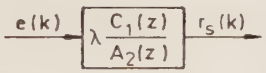

Bild A.1.1. Blockschaltbild für die Darstellung eines stationären stochastischen Signals als gefiltertes weißes (0,1) normalverteiltes Rauschen.

Das in Bild A.1.1 dargestellte System wird beschrieben im z-Bereich durch

$$R_s(z) = \lambda \frac{C_1(z)}{A_2(z)} E(z)$$

$$\text{mit} \quad C_1(z) = 1 + c_{11}z^{-1} + \ldots\ c_{m1}z^{-m}\ , \ \text{Grad}\ C_1 = m \qquad \text{(A.1.1)}$$

$$\text{und} \quad A_2(z) = 1 + a_{12}z^{-1} + \ldots\ a_{12}z^{-1}\ , \ \text{Grad}\ A_2 = 1$$

oder im Zeitbereich durch die Differenzengleichung

$$r_s(k) + a_{12} r_s(k-1) + \ldots a_{12} r_s(k-1)$$

$$= \lambda (e(k) + c_{11} e(k-1) \ldots c_{m1} e(k-m)) \; . \qquad \text{(A.1.2)}$$

Bild A.1.2. Stochastisch gestörte Regelstrecke

Eine Regelstrecke, deren Ausgangssignal y(k) durch eine deterministische Eingangsgröße u(k) beeinflußt und durch ein nicht beeinflußbares stochastisches Signal $r_s(k)$ gestört wird, siehe Bild A.1.2, läßt sich entsprechend durch das in Bild A.1.3 dargestellte Modell darstellen

mit $B_1(z) = b_{o1} + b_{11} z^{-1} + \ldots b_{k1} z^{-k}$ Grad $B_1 = k$

$A_1(z) = 1 + a_{11} z^{-1} + \ldots a_{i1} z^{-i}$ Grad $A_1 = i$, $d \geq 1$.

Betrachten wir die Regelung einer stochastisch gestörten Regelstrecke als Optimierungsproblem und fordern wir als Kriterium das Minimum des Gütefunktionals

$$I = E\{y(k+d) - E\{y(k+d)\}\}^2 \; , \qquad \text{(A.1.3)}$$

also das Minimum der Varianz, so erhalten wir als Lösung den Minimum-Varianz-Regler (MV-Regler) (Åström (1970)). Notwendig

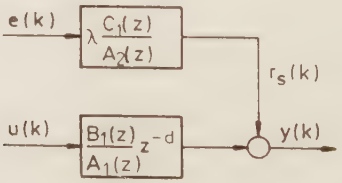

Bild A.1.3. Modell einer stochastisch gestörten Regelstrecke

für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises ist dabei, wie sich aus der anschließenden Stabilitätsbetrachtung zeigt, eine noch weitergehende Einschränkung der Eigenschaften des stochastischen Signalanteils. Aus Stabilitätsgründen muß gefordert werden, daß das Zählerpolynom C(z) des Störfilters keine Nullstellen auf dem Einheitskreis besitzen darf.

A.1.1. Herleitung des MV-Reglers

Zur Herleitung des MV-Reglers wird das in Bild A.1.3 dargestellte Modell in einer etwas einfacheren Form gemäß Bild A.1.4 dargestellt.

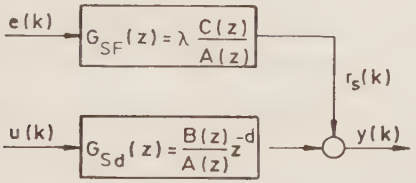

Bild A.1.4. Blockschaltbild der Regelstrecke mit drei Polynomen

Die Polynome A(z), B(z) und C(z) berechnen sich entsprechend Bild A.1.1 und A.1.3 zu:

$$A(z) = A_1(z)\ A_2(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \ldots\ a_n z^{-n}$$

$$B(z) = A_2(z)\ B_1(z) = b_o + b_1 z^{-1} + \ldots\ b_n z^{-n} \qquad \text{(A.1.4)}$$

$$C(z) = C_1(z)\ A_1(z) = 1 + c_1 z^{-1} + \ldots\ c_n z^{-n}\ 1).$$

Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit kann Grad A = Grad B = Grad C = n angenommen werden. Der Grad aller Polynome ist also gleich n; evtl. fehlende Koeffizienten können stets gleich Null gesetzt werden.

---

1) Bei der Herleitung des MV-Reglers für eine Regelstrecke mit dem Modellansatz gemäß Bild A.1.3 ist es zweckmäßig, die Polynome A(z), B(z), C(z) gemäß Gl.(A.1.4) zu berechnen und anschließend die Ableitung gemäß Abschnitt A.1.1 durchzuführen.

Als Differenzengleichung erhalten wir

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots a_n y(k-n) = b_o u(k-d) + b_1 u(k-d-1) + \ldots b_n u(k-n-d) + \lambda\left[e(k) + c_1 e(k-1) + \ldots c_n e(k-n)\right] \qquad (A.1.5)$$

oder nach y(k) aufgelöst:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \ldots -a_n y(k-n) + b_o u(k-d) + b_1 u(k-d-1) + \ldots b_n u(k-n-d) + \lambda_e\left[e(k) + c_1 e(k-1) \ldots + c_n e(k-n)\right] \qquad (A.1.6)$$

bzw. um d Abtastschritte verschoben:

$$y(k+d) = -a_1 y(k+d-1) - \ldots -a_n y(k+d-n) + b_o u(k) + \ldots b_n u(k-n) + \lambda\left[e(k+d) + c_1 e(k+d-1) + \ldots c_n e(k+d-n)\right]. \qquad (A.1.7)$$

Das Optimierungsproblem zur Erzielung minimaler Varianz läßt sich anhand der in Gl. (A.1.7) dargestellten Systemgleichung wie folgt formulieren:

Zum aktuellen Zeitpunkt k soll u(k) so gewählt werden, daß die Varianz

$$E\{y(k+d) - E\{y(k+d)\}\}^2 \qquad (A.1.8)$$

minimal wird. Eine minimale Varianz kann genau dann erreicht werden, wenn u(k) so gewählt wird, daß das aufgrund der Meßwerte zum Zeitpunkt k berechnete Signal y(k+d), das mit y(k+d/k) bezeichnet werden soll, genau dem Erwartungswert von y(k+d) entspricht.

Zur Lösung des Optimierungsproblems betrachten wir die z-Transformation von Gl. (A.1.7):

$$z^d Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U(z) + \lambda \frac{C(z)}{A(z)} z^d E(z) \quad . \qquad (A.1.9)$$

Der Term der rechten Seite, der die stochastische Störung beschreibt, läßt sich in zwei Teile zerlegen. Dabei stellt der eine Teil die in der Zukunft liegende Störung (bezogen auf den aktuellen Zeitpunkt k), der andere Teil die bereits wirksame Störung bis zum Zeitpunkt k dar. Es gilt:

$$C(z) = A(z)\ F(z) + z^{-d}\ K(z) \qquad \text{(A.1.10)}$$

mit $F(z) = 1 + f_1 z^{-1} + \ldots\ f_{d-1} z^{-d+1}$

$$K(z) = k_o + k_1 z^{-1} + \ldots\ k_{n-1} z^{-n+1}\ .$$

Für diese Polynomgleichung wurde von Aström (1970) der Begriff "Identitätsgleichung" eingeführt. In Verbindung mit Gl.(A.1.9) erhalten wir:

$$z^d Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}\ U(z) + \lambda\ F(z) z^d\ E(z) + \lambda\ \frac{K(z)}{A(z)}\ E(z)\ . \qquad \text{(A.1.11)}$$

$\lambda F(z) z^d\ E(z)$ ist die künftige Störung, $\lambda \frac{K(z)}{A(z)}\ E(z)$ die bereits wirksame Störung. Der Term, der die Störung bis zum Zeitpunkt k beschreibt, kann gemäß Gl.(A.1.9) durch das Ausgangssignal der Strecke entsprechend folgender Beziehung

$$\lambda\ E(z) = \frac{A(z)}{C(z)}\ Y(z) - z^{-d}\ \frac{B(z)}{C(z)}\ U(z) \qquad \text{(A.1.12)}$$

ersetzt werden. Für Gl.(A.1.11) ergibt sich damit:

$$z^d Y(z) = \lambda\ F(z)\ z^d E(z) + \left[\frac{B(z)}{A(z)} - \frac{z^{-d} B(z)}{C(z)}\ \frac{K(z)}{A(z)}\right] U(z) + \frac{K(z)}{C(z)}\ Y(z) \qquad \text{(A.1.13)}$$

bzw. unter Verwendung der Identitätsgleichung Gl.(A.1.10):

$$z^d Y(z) = \lambda\ F(z)\ z^d E(z) + \frac{B(z)\ F(z)}{C(z)}\ U(z) + \frac{K(z)}{C(z)}\ Y(z)\ . \qquad \text{(A.1.14)}$$

Bilden wir auf beiden Seiten den Erwartungswert, so ergibt sich mit der Bedingung, daß der Mittelwert des weißen Rauschens Null ist,

$$E\{\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\ E(z)\} = 0$$

und

$$E\{\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)z^{d}\}\} = E\{y(k+d)\}$$

$$= E\{\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{B(z)F(z)}{C(z)}\ U(z) + \frac{K(z)}{C(z)}\ Y(z)\}\} \quad . \tag{A.1.15}$$

Für den Mittelwert des farbigen Rauschens am Streckenausgang gilt im ungeregelten Fall mit u(k) = 0

$$E\{y(k+d)\} = \lambda\ \frac{C(1)}{A(1)}\ E\{e(k+d)\} = 0 \quad . \tag{A.1.16}$$

Gemäß Gl.(A.1.8) und Gl.(A.1.16) erhalten wir aus der Forderung, daß der Erwartungswert des Ausgangssignals der Regelstrecke gleich dem Erwartungswert des farbigen Rauschsignals sein muß, mit Gl. (A.1.15) die Bedingung:

$$E\{\mathcal{Z}^{-1}\ \{\frac{B(z)\ F(z)}{C(z)}\ U(z) + \frac{K(z)}{C(z)}\ Y(z)\} = 0 \quad . \tag{A.1.17}$$

Diese Beziehung, die den Zusammenhang zwischen Stellsignal und Ausgangssignal beschreibt, kann als Regler gemäß Bild A.1.5 mit der Übertragungsfunktion

$$\frac{-U(z)}{Y(z)} = \frac{K(z)}{B(z)\ F(z)} \tag{A.1.18}$$

interpretiert werden. Für den geschlossenen Regelkreis ergibt sich als Störübertragungsfunktion bezüglich e(k) gemäß Gl.(A.1.14) mit Gl.(A.1.18)

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \lambda\ F(z) \quad . \tag{A.1.19}$$

Unter der Voraussetzung

$$E\{e^{2}(k)\} = 1$$

erhalten wir für die Varianz des Ausgangssignals

$$E\{y(k+d) - E\{y(k+d)\}\}^2 = E\{\lambda \mathfrak{Z}^{-1}\{F(z)\ E(z)\}\}^2$$

$$= \lambda^2 (1 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 \ \ldots\ f_{d-1}^2) \ . \quad \text{(A.1.20)}$$

Die Varianz des Ausgangssignals des geschlossenen Regelkreises hängt wie der Grad von F(z) von der diskreten Totzeit ab. Das farbige Rauschen, das wir für das Ausgangssignal erhalten, wird, da es durch Summation von d-1 unabhängigen Rauschtermen entsteht, als "moving-average"-Prozeß (d-1)-ter Ordnung bezeichnet (Aström (1970)).

Der erhaltene Regler ist ein optimaler Regler im Sinne des in Gl. A.1.8 formulierten Gütefunktionals.

A.1.2. Stabilitätsbetrachtung des geschlossenen Regelkreises

Mit dem nach Gl.(A.1.18) gewonnenen Regelgesetz und der in Gl. (A.1.9) dargestellten Beziehung für die Regelgröße y ergibt sich für den geschlossenen Regelkreis das in Bild A.1.5 dargestellte Blockschaltbild.

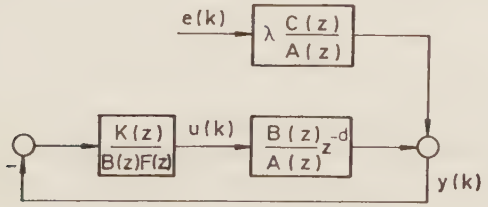

Bild A.1.5. Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises

Die Beziehung zwischen Stellsignal u(k) und weißem Rauschen e(k) lautet gemäß Bild A.1.5 unter Verwendung der Identitätsgleichung (A.1.10)

$$U(z) = \frac{-K(z)}{B(z)} \lambda\ E(z) \ . \quad \text{(A.1.21)}$$

Das Stellsignal ist nur dann begrenzt, wenn sämtliche Wurzeln von B(z) im Einheitskreis liegen. Ist dies der Fall, werden die Eigenbewegungen des geschlossenen Regelkreises durch die Wurzeln der Gleichung

$$C(z) = 0 \tag{A.1.22}$$

bestimmt. Damit ergibt sich gemäß Gl.(A.1.21) und (A.1.22) die Forderung: Die beiden Polynome C(z) und B(z) dürfen nur Wurzeln im Einheitskreis besitzen. Aus der Forderung, daß das Rauschen stationär sein soll, folgt die Forderung, daß A(z) nur Wurzeln innerhalb des Einheitskreises besitzen darf.

A.1.3. Erweiterungen des MV-Reglers

A.1.3.1. Erweiterung für nichtminimalphasige Regelstrecken

V. Peterka (1972) zeigte, daß durch Modifikation der verwendeten Identitätsgleichung ein optimaler MV-Regler für nichtminimalphasige Regelstrecken unter der Nebenbedingung einer beschränkten Varianz des Stellsignals erreicht werden kann. Das erreichte Minimum der Varianz stellt dabei nicht das absolute Minimum, sondern nur ein relatives dar. Das Zählerpolynom der Regelstrecke lasse sich in zwei Teile

$$B(z) = B_1(z)\ B_2(z) \quad \text{mit } B_2(0) = 1 \tag{A.1.23}$$

aufspalten. Bei $B_1(z)$ liegen die Wurzeln innerhalb, bei $B_2(z)$ außerhalb des Einheitskreises. Die modifizierte Identitätsbeziehung

$$C(z)\ \tilde{B}_2(z) = A(z)\ F_1(z) + z^{-d}\ B_2(z)\ K_1(z) \tag{A.1.24}$$

mit $B_2(z) = 1 + b_1 z^{-1} + \ldots\ b_{n2} z^{-n2}$

$\tilde{B}_2(z) = z^{-n2} + b_1 z^{-n2+1} + \ldots\ b_{n2}$

$F_1(z) = f_o + f_1 z^{-1} + \ldots\ f_{d-1+n2} z^{-n2+d-1}$

$K_1(z) = k_o + k_1 z^{-1} + \ldots\ k_{n-1} z^{-n+1}$

dient zur Berechnung der Reglerpolynome. Als Stellgesetz ergibt sich die Beziehung:

$$U(z) = \frac{-K_1(z)}{F_1(z)\ B_1(z)}\ Y(z)\ . \qquad \text{(A.1.25)}$$

Die Störübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises lautet:

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \lambda\ \frac{F_1(z)}{\tilde{B}_2(z)}\ . \qquad \text{(A.1.26)}$$

Aström (1978) zeigte, daß diese Beziehungen ein Minimum der Varianz unter der Nebenbedingung, daß das Stellsignal beschränkt bleibt, darstellt. Zum Nachweis dieser Behauptung wird ein neues Signal W(z) eingeführt, das dieselbe Varianz wie das Ausgangssignal der Strecke besitzt. Mit

$$Y(z) = \frac{B_2(z)}{\tilde{B}_2(z)}\ W(z) \qquad \text{(A.1.27)}$$

ergibt sich ein modifiziertes Streckenmodell unter Verwendung von Gl.(A.1.9)

$$W(z) = \frac{B_1(z)\ \tilde{B}_2(z)\,z^{-d}}{A(z)}\ U(z) + \lambda\ \frac{C(z)\ \tilde{B}_2(z)}{A(z)\ B_2(z)}\ E(z)\,. \qquad \text{(A.1.28)}$$

Der Anteil, der die stochastische Störung beschreibt, kann mittels der Identitätsgleichung Gl.(A.1.24) wie folgt umgeformt werden

$$W(z) = \frac{B_1(z)\ \tilde{B}_2(z)\,z^{-d}}{A(z)}\ U(z) + \lambda\ \frac{F_1}{B_2(z)}\ E(z) + \lambda\ \frac{z^{-d}\ K_1(z)}{A(z)}\ E(z)\ . \qquad \text{(A.1.29)}$$

Der dritte Term der rechten Seite läßt sich durch Stell- und Ausgangssignal gemäß Gl.(A.1.9) beschreiben. Es ergibt sich

$$W(z) = \frac{B_1(z)\ \tilde{B}_2(z) z^{-d}}{A(z)}\ U(z)$$

$$+ \lambda \frac{F_1(z)}{B_2(z)}\ E(z) + \frac{z^{-d} K_1(z)}{A(z)} \left[\frac{A(z)}{C(z)}\ Y(z) - \frac{B(z)}{C(z)}\ z^{-d}\ U(z)\right]$$

$$= \left[\frac{B_1(z)\ \tilde{B}_2(z) z^{-d}}{A(z)} - \frac{z^{-2d} B(z)\ K_1(z)}{A(z)\ C(z)}\right]\ U(z)$$

$$+ \frac{K_1(z)}{C(z)}\ Y(z) + \lambda\ \frac{F_1(z)}{B_2(z)}\ E(z)$$

$$= \frac{z^{-d}\ B_1(z)\ B_2(z)}{C(z)} \left[\frac{C(z)\ \tilde{B}_2(z)}{A(z)\ B_2(z)} - \frac{z^{-d} K_1(z)}{A(z)}\right]\ U(z)$$

$$+ \frac{K_1(z)}{C(z)}\ Y(z) + \lambda \frac{F_1(z)}{B_2(z)}\ E(z)\ .$$

Unter erneuter Verwendung der Identitätsbeziehung Gl.(A.1.24) erhalten wir

$$W(z) = \lambda \frac{F_1(z)}{B_2(z)}\ E(z) + z^{-d} \left[\frac{B_1(z)\ F_1(z)}{C(z)}\ U(z) + \frac{K_1(z)}{C(z)}\ Y(z)\right]$$

bzw. um d Schritte verschoben

$$z^d\ W(z) = \lambda \frac{F_1(z)}{B_2(z)}\ z^d\ E(z) + \left[\frac{B_1(z)\ F_1(z)}{C(z)}\ U(z) + \frac{K_1(z)}{C(z)}\ Y(z)\right]\ .$$

Das entsprechende Signal im Zeitbereich lautet:

$$w(k+d) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\lambda\ \frac{F_1(z)}{B_2(z) z^{-d}}\ E(z)\right\}$$

$$+ \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{B_1(z)\ F_1(z)}{C(z)} U(z) - \frac{K_1(z)}{C(z)} Y(z)\right]. \qquad \text{(A.1.30)}$$

Der erste nichtkausale Term ergibt im Zeitbereich eine konvergente Folge $e(k+1) + \mu_1\ e(k+2)$ ..., während die anderen Terme, da $C(z)$ nur Wurzeln im Einheitskreis besitzt, konvergente Folgen für $y(k)$, $y(k-1)$ ... und $u(k)$, $u(k-1)$ ... ergeben.

Der zweite Term kann mittels des Regelgesetzes Gl.(A.1.25) zu Null gemacht werden, während der erste Teil nicht beeinflußbar ist und die minimale Varianz bei beschränktem Stellsignal darstellt. Die z-Transformierte des Ausgangssignals y(k) gemäß Gl. (A.1.26) läßt sich gemäß folgender Beziehung

$$Y(z) = \lambda \frac{F_1(z)}{\tilde{B}_2(z)} E(z) = \lambda F(z)\ E(z) + \lambda \frac{F_1^*(z)}{\tilde{B}_2(z)} E(z)$$

in zwei Teile zerlegen. Dabei stellt der erste Anteil die bei unbeschränktem Stellsignal erreichbare minimale Störung des Ausgangssignals dar, siehe Abschnitt A.1.2, Gl.(A.1.20), während der zweite Teil, wie Aström (1978) zeigte, bei beschränktem Stellsignal nicht vermieden werden kann. Das Polynom $F_1^*(z)$ kann aus der Partialbruchzerlegung

$$\frac{K(z)\ B_2(z)}{A(z)\ B_2(z)} = \frac{F_1^*(z)}{B_2(z)} + \frac{F_1^{**}(z)}{A(z)}$$

gewonnen werden. (Die Polynome K(z) und F(z) entsprechen den im Abschnitt A.1.1 eingeführten Polynomen.)

Der Grund für die Einführung des Signals W(z) besteht darin, daß damit eine Systembeschreibung - bei gleicher Varianz des Ausgangssignals - gewonnen werden kann, bei der das Zählerpolynom der Regelstrecke keine Nullstelle außerhalb des Einheitskreises besitzt. Für dieses modifizierte Modell kann dann ein optimaler Regler bestimmt werden.

A.1.3.2. Erweiterungen durch Vorgabe einer Störübertragungsfunktion (Åström (1970))

Analog zu dem Vorgehen von Peterka kann durch Hinzufügen eines beliebigen Terms in der Identitätsgleichung die Lage der Pole und Nullstellen der Störübertragungsfunktion vorgegeben werden.

Fügen wir auf der rechten Seite den nicht kompensierbaren Term $B_2(z)$ analog zu Gl.(A.1.24) hinzu, so ergibt sich als Identitätsgleichung

$$C(z) = A(z)\ F_2(z) + z^{-d}\ B_2(z)\ K_2(z)$$

$$\text{mit } F_2(z) = 1 + f_1 + \ldots + f_{n2+d-1} z^{-n2-d+1}$$

$$\text{und } K_2(z) = k_o + k_1 z^{-1} + \ldots + k_{n-1} z^{-n+1} \ . \qquad \text{(A.1.31)}$$

Die entsprechende Störübertragungsfunktion lautet

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \lambda\ F_2(z) \qquad \text{(A.1.32)}$$

und als Regelgesetz erhalten wir

$$U(z) = - \frac{K_2(z)}{B_1(z)\ F_2(z)}\ Y(z) \ . \qquad \text{(A.1.33)}$$

Eine weitere Möglichkeit (Åström (1970)) besteht darin, eine Störübertragungsfunktion der Form

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \lambda\ \frac{F_3(z)}{H(z)} \qquad \text{(A.1.34)}$$

zu fordern. H(z) besitzt dabei den Grad n2+d-1.

Als modifizierte Identitätsgleichung ergibt sich

$$H(z)\ C(z) = A(z)\ F_3(z) + z^{-d}\ B_2(z)\ K_3(z) \qquad \text{(A.1.35)}$$

mit

$$F_3(z) = f_o + f_1 z^{-1} + \ldots + f_{n2+d-1}\ z^{-n2-d+1}$$

und

$$K_3(z) = k_o + k_1 z^{-1} + \ldots + k_{n-1} z^{-n+1} .$$

Als Stellgesetz erhalten wir:

$$U(z) = - \frac{K_3(z)}{B_1(z)\ F_3(z)}\ Y(z) \ . \qquad \text{(A.1.36)}$$

Falls B(z) nur Wurzeln nahe dem Stabilitätsrand und Wurzeln außerhalb des Einheitskreises besitzt, läßt sich die Identitätsgleichung wie folgt darstellen:

$$C(z) = A(z)\, F_4(z) + z^{-d}\, B(z)\, K_4(z)$$

$$\text{und } F_4(z) = 1 + f_1 z^{-1} + \ldots, f_{d-1+n} z^{-n-d+1}$$

$$K_4(z) = k_o + k_1 z^{-1} + \ldots k_{n-1} z^{-n+1} \quad . \qquad \text{(A.1.37)}$$

Als Störübertragungsfunktion ergibt sich

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \lambda\, F_4(z) \qquad \text{(A.1.38)}$$

und als Stellgesetz

$$U(z) = -\frac{K_4(z)}{F_4(z)}\, Y(z) \, . \qquad \text{(A.1.39)}$$

Im Unterschied zu den vorigen Modifikationen werden hier keine Zählernullstellen der Regelstrecke durch Reglerpole kompensiert. Vergleichen wir die Modifikationen gemäß den Abschnitten A.1.3.1 und A.1.3.2, so läßt sich folgende Feststellung treffen:

Die von Peterka angegebene Lösung ergibt als Störübertragungsfunktion einen "auto-regressiven moving average"-Prozeß. Die Pole sind stabil und entsprechen genau den inversen Wurzeln von $B_2(z)$.

Bei den anderen suboptimalen Lösungen besitzt die Störübertragungsfunktion genau dieselbe Anzahl von Nullstellen wie bei dem Vorschlag von Peterka, aber entweder Pole bei z gleich Null oder beliebig vorgegebene Pole.

Eine Entscheidung für eine der dargestellten Modifikationen muß im Einzelfall unter Berücksichtigung der Varianz und der dafür notwendigen Stellgröße geschehen.

A.1.4. Erweiterung des MV-Reglers durch Bewertung der Stellgröße

Der MV-Regler, wie er von Aström vorgeschlagen wurde, benötigt zur Erreichung minimaler Varianz ein sehr hohes Stellsignal. Da gerade bei technischen Regelstrecken das Stellsignal sehr oft Beschränkungen unterliegt, erscheint es sinnvoll, die Stellgröße ebenfalls zu bewerten. Analog zu Gl.(A.1.8) ergibt sich als Kriterium das Minimum des Gütefunktionals

$$I_2 = E\{(y(k+d) - E\{y(k+d)\})^2 + u^2(k)\} \quad . \qquad (A.1.40)$$

Da y(k+d) und u(k) voneinander abhängig sind, kann die Lösung des Optimierungsproblems nicht durch Differentiation von Gl. (A.1.40) nach u(k) gewonnen werden. Vielmehr muß zur Berechnung des Regelgesetzes entweder die diskrete Wiener-Hopf-Gleichung oder nach Transformation in den Zustandsraum die diskrete Matrix-Riccati-Gleichung gelöst werden (MacGregor und Tidwell (1977)). Clarke und Hastings-James (1971) schlagen die Minimierung eines verwandten Gütefunktionals vor:

$$I_3 = y^2(k+d/k) + r\,u^2(k) \quad . \qquad (A.1.41)$$

Der Vorhersagewert y(k+d/k) des Signals y(k+d) aufgrund der Kenntnisse der Signalwerte zum Zeitpunkt k entspricht dem Erwartungswert E{y(k+d)}. Das Gütefunktional I_3 lautet dann:

$$I_3 = [E\{y(k+d)\}]^2 + r\,u^2(k) \quad . \qquad (A.1.42)$$

Die Berechnung des Regelkreises nach diesem Gütefunktional führt zur Wahl eines Stellsignals, das die Summe aus Vorhersage des Ausgangssignals und des aktuellen Stellsignals u(k) zu Null setzt.

A.1.4.1. Herleitung des Stellgesetzes mit einer Bewertung des aktuellen Stellsignals

Für die Vorhersage y(k+d/k) des Ausgangssignals y(k+d) erhalten wir gemäß Gl.(A.1.15):

$$y(k+d/k) = \mathcal{Z}^{-1}\{\frac{K(z)}{C(z)}\,Y(z) + \frac{B(z)\,F(z)}{C(z)}\,U(z)\} \quad . \qquad (A.1.43)$$

Nach Hinzufügen des in u(k) quadratischen Terms ergibt sich für das Gütefunktional I_3:

$$I_3 = [\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{K(z)}{C(z)}\,Y(z) + \frac{B(z)\,F(z)}{C(z)}\,U(z)\}]^2 + ru^2(k) \quad . \qquad (A.1.44)$$

Differenzieren wir nach u(k), um das Minimum zu gewinnen, so erhalten wir als Bestimmungsgleichung

$$\frac{dI_3}{du(k)} = 2[\mathfrak{Z}^{-1}\{\frac{K(z)}{C(z)} Y(z) + \frac{B(z)\ F(z)}{C(z)} U(z)\}]b_o + 2ru(k) \stackrel{!}{=} 0 .$$

(A.1.45)

Der Faktor b_o stellt dabei die innere Ableitung des ersten Terms dar. Nach Rücktransformation in den z-Bereich ergibt sich als Bestimmungsgleichung für das Stellgesetz:

$$b_o \frac{K(z)}{C(z)} Y(z) + \frac{B(z)\ F(z)\ b_o + r\ C(z)}{C(z)} U(z) = 0$$

und damit als Übertragungsfunktion des Reglers:

$$\frac{U(z)}{Y(z)} = - \frac{K(z)}{\frac{r\ C(z)}{b_o} + B(z)\ F(z)} \qquad (A.1.46)$$

Die Störübertragungsfunktion ergibt sich zu:

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \lambda \frac{B(z)\ F(z) + \frac{r}{b_o} C(z)}{B(z) + \frac{r}{b_o} A(z)} . \qquad (A.1.47)$$

A.1.4.2. Stabilitätsbetrachtung des geschlossenen Regelkreises

Die Pole des geschlossenen Regelkreises bestimmen sich aus dem charakteristischen Polynom:

$$A(z)[\frac{r\ C(z)}{b_o} + B(z)\ F(z)] + K(z)\ B(z)\ z^{-d} = 0 . \qquad (A.1.48)$$

Unter Berücksichtigung der Identitätsbeziehung gemäß Gl.(A.1.10) ergibt sich:

$$C(z)\ [\frac{A(z)\ r}{b_o} + B(z)] = 0 \qquad (A.1.49)$$

Für die beiden Polynome C(z) und A(z) ergeben sich die gleichen Einschränkungen wie bei dem ursprünglichen Entwurf (siehe Abschnitt A.1.2).

Das Stellgesetz als Funktion des weißen Rauschens e(k) berechnet sich nach kurzer Zwischenrechnung zu

$$U(z) = \lambda \frac{-K(z)}{B(z) + \frac{r}{b_o} A(z)} E(z). \qquad (A.1.50)$$

Das Stellsignal bleibt unbeschränkt, falls

$$B_p(z) = B(z) + \frac{r}{b_o} A(z)$$

nur Wurzeln im Einheitskreis besitzt. Dies kann, falls das Polynom A(z) nur Wurzeln im Einheitskreis besitzt, durch eine große Stellbewertung in der Regel erreicht werden. Die Bestimmung der Lage der Wurzeln von $B_p(z)$ kann, in Abhängigkeit von r, mit den Methoden der Wurzelortskurve erfolgen.

A.2. Der Self-Tuning-Regler

Betrachten wir die Regelung eines stochastisch gestörten Prozesses, wie er im Anhang A1 vorgestellt wurde und gehen wir von der Voraussetzung aus, daß der zu regelnde Prozeß nicht exakt bekannt ist, so besteht die Möglichkeit, durch Identifikation ein Modell zu erhalten. Eine erste Möglichkeit besteht darin, zuerst eine Identifikationsphase durchzuführen und anschließend aus den identifizierten Parametern den Regler zu berechnen. Åström und Wittenmark (1971) konnten zeigen, daß es nicht genügt, die wahren Parameter im Reglergesetz für den MV-Regler durch die geschätzten Parameter zu ersetzen, sondern daß zur Erreichung einer minimalen Varianz die Parameterunsicherheiten mit einbezogen werden müssen. Ein entscheidender Nachteil bei diesem Vorgehen liegt darin begründet, daß die Informationen während des Regelvorgangs nicht zur Verbesserung des Streckenmodells und damit des Reglers genutzt werden können.

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, Identifikation und Regelung zu kombinieren, d.h. gleichzeitig zu identifizieren und zu regeln. Für die Minimierung der Varianz, also des Erwartungswertes der quadratischen Abweichung vom Mittelwert, gehen die Parameterunsicherheiten ebenfalls in den Reglerentwurf ein.

Der Grundgedanke von Åström und Wittenmark (1973) bei der Einführung des Self-Tuning-Reglers (ST-Reglers) ist die Vernachlässigung der Parameterunsicherheiten. Die mittels eines leistungsfähigen Schätzverfahren erhaltenen Parameter der Regelstrecke werden als "wahr" angenommen und zur unmittelbaren Berechnung des Reglers verwendet. Durch diese Vereinfachung wird nicht mehr die Varianz minimiert; es kann allerdings gezeigt werden, daß bestimmte Werte der Kreuzkorrelationsfunktion $r_{uy}(\tau)$ und der Autokorrelationsfunktion $r_{yy}(\tau)$ identisch Null sind, und für den Fall der Konvergenz der Parameter, der ST-Regler gegen den MV-Regler konvergiert.

Ein zweiter wichtiger Grundgedanke für den ST-Regler betrifft die Modifikation des Streckenmodells. Bei einer Schätzung des Modells der stochastisch gestörten Regelstrecke, wie sie in Anhang A.1 für den Minimum-Varianz-Regler eingeführt wird, s. Bild A.1.4. muß zu jedem Abtastschritt die Identitätsgleichung (A.1.10) gelöst werden.

Damit ergibt sich entsprechend der von Schmid (1979) eingeführten Bezeichnungsweise ein adaptives Regelungssystem mit einer sogenannten offenen Wirkungsschleife.

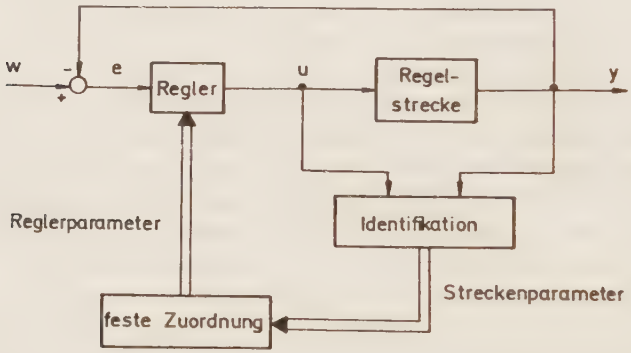

Bild A.2.1. Adaptives Regelungssystem mit offener Wirkungsschleife

Die Reglerparameter sind über eine feste, in diesem Fall nichtlineare Beziehung mit den Regelstreckenparametern verbunden. Betrachten wir die Identifizierung, so werden die Regelstreckenparameter direkt identifiziert, die Parameter des Reglers werden indirekt nachgestellt. Åström und Wittenmark modifizieren das Streckenmodell in der Art und Weise, daß die identifizierten Parameter direkt als Reglerparameter Verwendung finden. Die Identifizierung der Streckenparameter erfolgt indirekt, das Parameternachstellgesetz ist direkt. Entsprechend der von Schmid (1979) eingeführten Bezeichnungsweise handelt es sich dann um ein adaptives Regelungssystem mit geschlossener Wirkungsschleife, wie in Bild A.2.2 dargestellt.

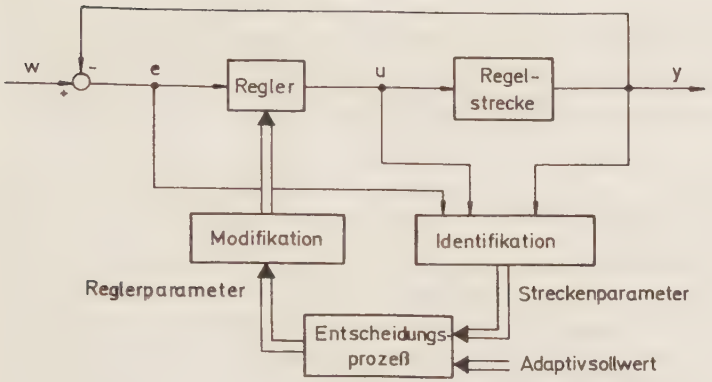

Bild A.2.2. Adaptives Regelsystem mit geschlossener Wirkungsschleife

Diese Umformung hat zur Folge, daß eine Konvergenzbetrachtung im Vergleich zu einem adaptiven Regelungssystem mit offener Wirkungsschleife durch die direkte Verwendung der identifizierten Parameter als Reglerparameter wesentlich leichter möglich ist.

A.2.1. Herleitung des ST-Reglers

Wir betrachten das in Bild A.1.4 dargestellte Blockschaltbild der Regelstrecke und die zugehörige Beziehung zwischen Ein- und Ausgangssignalen:

$$A(z)\ Y(z) = B(z)z^{-d}\ U(z) + \lambda\ C(z)\ E(z)\ . \qquad (A.2.1)$$

Zerlegen wir den Term der rechten Seite, der die stochastische Störung beschreibt, mittels der Identitätsgleichung in zwei Teile, so erhalten wir

$$A(z)\ Y(z) = B(z)z^{-d}\ U(z) + \lambda\ F(z)\ A(z)\ E(z) + \lambda\ K(z)z^{-d}\ E(z)\ . \qquad (A.2.2)$$

Der letzte Term in Gl.(A.2.2), der die wirksamen Störungen bis zum Zeitpunkt k-d beschreibt, kann mittels Gl.(A.2.1) durch u- und y-Werte ersetzt werden. Es ergibt sich für das Ausgangssignal:

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d} U(z) + \lambda F(z) E(z) + z^{-d} \frac{K(z) A(z)}{A(z) C(z)} Y(z)$$

$$- z^{-2d} \frac{B(z) K(z)}{A(z) C(z)} U(z)$$

$$= \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d} \frac{C(z) - K(z) z^{-d}}{C(z)} U(z)$$

$$+ \frac{z^{-d} K(z)}{C(z)} Y(z) + \lambda F(z) E(z)$$

und unter erneuter Verwendung der Identitätsbeziehung Gl.(A.1.10)

$$Y(z) = z^{-d} \frac{B(z) F(z) A(z)}{A(z) C(z)} U(z) + \frac{z^{-d} K(z) Y(z)}{C(z)} + \lambda F(z) E(z)$$

(A.2.3)

oder mit

$$B(z) F(z) = \beta_o B(z) = \beta_o (1 + \beta_1 z^{-1} + \ldots + \beta_1 z^{-l})$$

$$B(z) = 1 + \beta_1 z^{-1} + \ldots + \beta_1 z^{-l}; \quad l = n + d - 1$$

und $K(z) = A(z); \qquad A(z) = \alpha_o + \ldots \alpha_m z^{-m}; \quad m = n - 1$

$$Y(z) = \beta_o \frac{B(z)}{C(z)} z^{-d} U(z) + \frac{A(z)}{C(z)} z^{-d} Y(z) + \lambda F(z) E(z) .$$

(A.2.4)

Für den Fall C(z) = 1 ergibt sich für die z-Transformierte des Signals y(k+d)

$$z^d\, Y(z) = \beta_o\, B(z)\, U(z) + A(z)\, Y(z) + \lambda\, F(z)\, z^d\, E(z)$$

$$= \beta_o\, B(z)\, U(z) + A(z)\, Y(z) + \varepsilon_{d-1}(z) \qquad \text{(A.2.5)}$$

mit der z-Transformierten $\varepsilon_{d-1}(z)$ eines moving average-Prozesses der Ordnung d-1. (Der Index d-1 soll andeuten, daß es sich um einen moving average-Prozeß d-1ter Ordnung handelt.) Die Übertragungsfunktion des Reglers zur Erreichung minimaler Varianz lautet:

$$\frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{-A(z)}{\beta_o B(z)} \,. \qquad \text{(A.2.6)}$$

Wenn $\varepsilon_{d-1}(z)$ nicht mit U(z) und Y(z) korreliert ist, kann für den modifizierten Modellansatz gemäß Gl.(A.2.5) die Least-Squares-Methode (LS-Methode) als Parameterschätzverfahren verwendet werden.

Die Vernachlässigung des in Gl.(A.2.4) verwendeten C-Polynoms bei gleichzeitiger Verwendung des Regelgesetzes gemäß Gl.(A.2.6) erscheint zulässig, weil Gl.(A.2.5) auch die Gleichung des Prädiktionssignals y(k+d/k) darstellt und es gerade Aufgabe des Regelgesetzes ist, die Prädiktion y(k+d/k) zu Null zu setzen. Oder anders ausgedrückt: Für den Fall, daß die Parameter ihre richtigen Werte erreicht haben, bewirkt das Stellgesetz zu jedem Zeitpunkt das Nullsetzen der Vorhersage y(k+d/k). Damit sind die zeitlich zurückliegenden Prädiktionswerte gleich Null und tragen nichts zur Schätzung bei. Eine Schätzung der Parameter des C-Polynoms ist praktisch nicht mehr möglich.

Der ST-Regler läßt sich als ein Regler beschreiben, bei dem die Schätzung der Parameter eines Prädiktors im Sinne der kleinsten Quadrate erfolgt und das Regelgesetz durch Nullsetzen der Prädik-

tion beschrieben wird. Da die Parameter des Prädiktors direkt geschätzt werden, finden sie auch direkt Verwendung im Regelgesetz. Als Nachteil gegenüber dem ursprünglichen Modellansatz - vergleichen wir den Fall C(z) gleich Eins - ergibt sich eine um d - 1 erhöhte Parameteranzahl.

Für ein Regelgesetz entsprechend Gl.(A.2.6) ist das Eingangssignal mit dem Rauschterm korreliert. Damit ist eine wichtige Voraussetzung für eine erwartungsfreie Schätzung der LS-Methode verletzt. Dies bedeutet, daß nicht alle Parameter des Prädiktors identifiziert werden können. Geben wir einen Parameter fest vor, dann erzwingen wir die Eindeutigkeit der Verlustfunktion für die LS-Schätzung und können damit alle anderen Parameter identifizieren. In der Regel wird β_o, der Vorfaktor des *B*-Polynoms, festgelegt.

Wird für die Schätzung die LS-Methode verwendet und vorausgesetzt, daß die identifizierten Parameter des Prädiktors für $t = kT \to \infty$ gegen feste Werte konvergieren und das Ausgangssignal das Ergodentheorem für die Momente zweiter Ordnung erfüllt, so läßt sich zeigen (Åström und Wittenmark (1973)), daß die Erwartungswerte folgender Korrelationsfunktionen für $\tau \geq d$ gleich Null sind:

$$r_{uy}(\tau) = 0 \qquad \tau \geq d$$
$$r_{yy}(\tau) = 0 \qquad \tau \geq d \quad . \tag{A.2.7}$$

Zum Beweis dieser Eigenschaft des ST-Reglers ist zu bemerken, daß dabei die Schätzung nach der LS-Methode als Lösung einer Matrix der Korrelationsfunktionen beschrieben werden kann. Weiterhin kann die Konvergenz der Parameter des ST-Reglers gegen die Parameter des MV-Reglers gezeigt werden, falls die Ordnungen der Prädiktorpolynome den Ordnungen der Zähler- und Nennerpolynome des MV-Reglers entsprechen und die beiden Polynome *A*(z) und *B*(z) keinen gemeinsamen Faktor enthalten. Falls eine der Ordnungen des Prädiktors zu groß gewählt wird, bleibt die Konvergenz erhalten. Falls allerdings beide Polynome zu groß gewählt werden, wird die Konvergenz nur nach Kürzung des gemeinsamen Faktors erreicht. Die Konvergenz der Parameter des ST-Reglers gegen die Parameter des MV-Reglers bewirken, daß es sich bei dem Ausgangssignal der Regelstrecke um einen "moving average"-Prozeß der Ordnung d - 1 handelt.

A.2.2. Stabiles Verhalten des ST-Reglers

Die im Abschnitt A.2.1 getroffenen Aussagen stellen nur unter der Annahme der Konvergenz der Parameter des mittels der LS-Methode geschätzten Prädiktors die Konvergenz des ST-Reglers gegen den MV-Reglers sicher. Damit ist noch keineswegs sichergestellt, daß die Parameter in allen Fällen gegen feste Werte konvergieren.

Ljung und Wittenmark (1974) konnten die globale asymptotische Stabilität des ST-Reglers nachweisen. Die globale asymptotische Stabilität ist genau dann gewährleistet, falls

1. die geschätzte Totzeit $\hat{d}$ mit der richtigen Totzeit d identisch ist,
2. die geschätzten Ordnungen der Prädiktor-Zähler- und Nennerpolynome größer oder gleich den richtigen Ordnungen sind.
3. die Regelstrecke minimalphasiges Verhalten besitzt.
4. die LS-Methode und der ST-Regler in der folgenden Form beschrieben und zusammengefaßt werden können. Es soll gelten:

Für das Parameternachstellgesetz:

$$\underline{p}_{k+1} = \underline{p}_k + \gamma_{k+1}\, \underline{S}_k \underline{m}_{k-\hat{d}} [y_{k+1} - \beta_o u_{k-\hat{d}} - \underline{p}_k^T \underline{m}_{k-\hat{d}}] \quad . \tag{A.2.8}$$

Für die Kovarianzmatrix:

$$\underline{\Lambda}_{k+1}^{-1} = \underline{\Lambda}_k^{-1} + \gamma_{k+1} [\underline{m}_{k-\hat{d}} \underline{m}_{k-\hat{d}}^T - \underline{\Lambda}_k^{-1}] \quad . \tag{A.2.9}$$

Für die Matrix $\underline{S}_k$:

$$\underline{S}_k = \frac{\underline{\Lambda}_k^{-1}}{1 + \gamma_{k+1} [\underline{m}_{k-\hat{d}}^T \underline{\Lambda}_k^{-1} \underline{m}_{k-\hat{d}} - 1]} \quad . \tag{A.2.10}$$

Für farbiges Rauschen am Regelstreckenausgang muß gelten:

$$E\{|r_s|\}^{4p} \leq C_1 \qquad p = \text{ganze Zahl} \tag{A.2.11}$$

und für den Gewichtsfaktor:

$$\gamma_k = C_\gamma k \qquad C_\gamma > 0 \; ; \qquad \frac{1}{p} < s \leq 1$$

$\underline{p}_k$ stellt den Parametervektor mit den Parametern der Polynome

A und B dar, $\underline{m}_k$ den dazugehörigen Signalvektor:

$$\underline{p}_k^T = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \ldots \beta_1]$$

$$\underline{m}_k^T = [-y_k, \ldots \quad -y_{k-m+1}, \hat{\beta}_o u_{k-1} \ldots \hat{\beta}_o u_{k-1}]$$

5. Für den gewählten Wert von β_o die Ungleichung

$$0 < \frac{\hat{\beta}_o}{b_o} < 2 \quad .$$

b_o ist dabei der erste Koeffizient des tatsächlichen B-Polynoms der Regelstrecke.

Bemerkenswert bei dieser Aussage ist, daß die Regelstrecke instabil sein kann. Für die stochastische Störung muß allerdings gefordert werden, daß das Zählerpolynom des Störfilters nur Nullstellen innerhalb des Einheitskreises besitzt.

A.2.3. Konvergenz des ST-Reglers

Die von Ljung und Wittenmark (1974) getroffene Aussage über die globale asymptotische Stabilität des ST-Reglers stellt nicht sicher, daß die Eigenschaften des ST-Reglers im Grenzfall mit denen des MV-Reglers identisch sind. Zur Beantwortung dieser Frage bedarf es einer eingehenden Untersuchung. Diese Untersuchungen wurden inzwischen mit Hilfe verschiedener Methoden durchgeführt. Beispielhaft sollen hier zwei Methoden dargestellt werden.

Ljung (1977a, 1977b) gibt eine gewöhnliche Differentialgleichung (Dgl.) an, mit der - unter der Voraussetzung, daß der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist -, die Konvergenz des ST-Reglers gegen den MV-Regler untersucht werden kann (s. Abschnitt A.2.3.1).

Schmid (1979) betrachtet den gesamten Regelkreis mit den Methoden der Hyperstabilität (s. Abschnitt A.2.3.2).

A.2.3.1. Die Bedingungen für die Konvergenz der gewöhnlichen Dgl. nach Ljung für den ST-Regler

Die Bedingungen werden im folgenden Fall nur für den Fall der diskreten Totzeit d = 1 angegeben, sie können aber ohne Schwierigkeit

auch auf Fälle d > 1 übertragen werden. Die Annahmen sind:

Die Regelstrecke wird durch Gl.(A.2.1) vollständig beschrieben

$$A(z)\ Y(z) = B(z)\ U(z)z^{-1} + \lambda\ C(z)\ E(z) \quad .$$

Das für die LS-Methode verwendete modifizierte Modell, analog Gl.(A.2.5), lautet

$$Y(z) = \beta_o\ \hat{B}(z)\ U(z)z^{-1} + \hat{A}(z)\ Y(z)z^{-1} + \varepsilon_k \qquad \text{(A.2.12)}$$

oder in Vektorschreibweise

$$\begin{aligned} y_k &= \beta_o u_{k-1} + \underline{\hat{p}}_k^T\ \underline{m}_k^T + \varepsilon_k \\ \underline{\hat{p}}_k^T &= [\hat{\alpha}_1, \ \ldots, \ \hat{\alpha}_m, \ \hat{\beta}_1, \ \ldots, \ \hat{\beta}_1] \\ \underline{m}_k^T &= [-y_{k-1}, \ \ldots, \ -y_{k-m}, \ u_{k-2}, \ \ldots, \ u_{k-1}] \end{aligned} \qquad \text{(A.2.13)}$$

und dem Regelgesetz

$$u_k = -\frac{1}{\beta_o}\ \underline{\hat{p}}_k^T\ \underline{m}_{k+1} \quad .$$

Die LS-Methode wird im Gegensatz zu den Gln.(A.2.8) bis (A.2.11) wie folgt angegeben

$$\begin{aligned} \underline{\hat{p}}_k &= \underline{\hat{p}}_{k-1} + \underline{\Lambda}_k\ \underline{m}_k\ \varepsilon_k \\ \underline{\Lambda}_{k+1}^{-1} &= \underline{\Lambda}_k^{-1} + \frac{1}{k}\ (\underline{m}_k\ \underline{m}_k^T - \underline{\Lambda}_k^{-1}) \ . \end{aligned} \qquad \text{(A.2.14)}$$

Der Gleichungsfehler ε_k wird durch

$$\varepsilon_k = y_k - \beta_o\ u_{k-1} - \underline{\hat{p}}_{k-1}^T\ \underline{m}_k \qquad \text{(A.2.15)}$$

beschrieben. Damit ergibt sich nach Ljung für das nichtlineare Differentialgleichungssystem, das gemeinsame Ruhelagen mit dem ST-Regler besitzt:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{p}}(\tau) &= [\underline{\bar{S}}(\tau)]^{-1}\ \underline{\bar{f}}[\underline{p}(\tau)] \\ \dot{\underline{S}}(\tau) &= \underline{\bar{P}}(\tau) - \underline{\bar{S}}(\tau) \end{aligned} \qquad \text{(A.2.16)}$$

mit

$$\underline{\bar{f}} = E\{\underline{m}_k \ \varepsilon_k\}$$

$$\underline{\bar{P}} = E\{\underline{m}_k \ \underline{m}_k^T\} \quad . \tag{A.2.17}$$

Der St-Regler konvergiert gegen den MV-Regler mit der Wahrscheinlichkeit 1, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. e(k) ist eine stationäre Folge unabhängiger Zufallsgrößen,
2. die Regelstrecke ist minimalphasig.
3. Die Trajektorien des Differentialgleichungssystems Gl.(A.2.16) verlassen nicht das Stabilitätsgebiet des ST-Reglers.
4. C(z) - 1/2 ist streng positiv reell (s.p.r.).

Falls die Polynome A(z), B(z), C(z) keinen gemeinsamen Faktor besitzen, konvergieren die Parameter des ST-Reglers mit der Wahrscheinlichkeit 1 gegen die Parameter des MV-Reglers. Die optimalen Parameter sind stets ein möglicher Konvergenzpunkt der Parameter. Falls C(z) nicht s.p.r. ist, kann der Parametervektor weder gegen den Parametervektor des MV-Reglers noch gegen einen anderen Wert mit der Wahrscheinlichkeit 1 konvergieren.
Falls die LS-Methode durch das Schätzverfahren mittels Stochastischer Approximation ersetzt wird, muß Bedingung 4. durch die Forderung

$$C(z) = \text{s.p.r.}$$

ersetzt werden.

A.2.3.2. Untersuchung mit der Hyperstabilitätsmethode

Der Beweis der global asymptotischen Stabilität mit der Methode der Hyperstabilität (Schmid, 1979) erfordert die Darstellung des ST-Reglers in die nichtlineare Standardstruktur gemäß Bild A.2.3. Zur vereinfachten Darstellung wird hier nur der Fall d = 1 betrachtet. Die Regelstrecke läßt sich gemäß Gl.(A.2.4) (unter Berücksichtigung von F(z) = 1 für d = 1) wie folgt darstellen:

$$C(z)\ Y(z) - \lambda E(z) = \beta_o U(z) z^{-1} + A(z)\ Y(z) z^{-1} + \beta_o (B(z)-1) U(z) z^{-1} \tag{A.2.18a}$$

oder in Vektordarstellung

$$C(z)\ Y(z) - \lambda E(z) = \beta_o \mathfrak{Z}\{u(k)\}z^{-1} + \mathfrak{Z}\{\underline{p}^T \underline{m}_k\} \qquad \text{(A.2.18b)}$$

mit

$$\underline{p}^T = \left[\alpha_o,\ \alpha_1,\ \cdots\ \alpha_m,\ \frac{\beta_1}{\beta_o},\ \frac{\beta_2}{\beta_o}\ \cdots\ \frac{\beta_l}{\beta_o}\right]$$

$$\underline{m}_k = \left[-y_{k-1},\ -y_{k-2},\ \cdots -y_{k-m},\ \beta_o u_{k-2},\ \beta_o u_{k-3},\ \cdots \beta_o u_{k-l-1}\right].$$

Das entsprechende Stellgesetz lautet

$$u_k = -\frac{1}{\beta_o}\, \underline{p}^T\, \underline{m}_k\ . \qquad \text{(A.2.18c)}$$

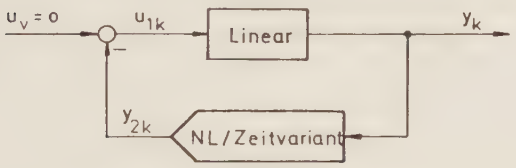

Bild A.2.3. Nichtlineare Standardstruktur

Die für die Schätzung des Parametervektors verwendete LS-Methode mit exponentieller Bewertung soll durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\hat{\underline{p}}_k = \hat{\underline{p}}_{k-1} + \underline{g}_k \varepsilon_k \qquad \text{(A.2.19a)}$$

$$\varepsilon_k = y_k - \overline{\beta}_o\ u_{k-1} - \hat{\underline{p}}_{k-1}^T \underline{m}_k \qquad \text{(A.2.19b)}$$

$$\underline{g}_k = \underline{\Lambda}_{k-1}\underline{m}_k \frac{1}{1 + \underline{m}_k^T\, \underline{\Lambda}_{k-1}\, \underline{m}_k} \qquad \text{(A.2.19c)}$$

$$\underline{\Lambda}_k = \underline{I} - \underline{\Lambda}_{k-1}\, \underline{m}_k\, \underline{m}_k^T (1/\rho + \underline{m}_k^T\, \underline{\Lambda}_{k-1}\, \underline{m}_k)^{-1}\, \underline{\Lambda}_{k-1} \qquad \text{(A.2.19d)}$$

Dabei gelten folgende Definitionen:

$$\hat{\underline{p}}_k^T = \left[\hat{\alpha}_1, \ldots,\ \hat{\alpha}_m,\ \frac{\hat{\beta}_1}{\beta_o},\ \frac{\hat{\beta}_2}{\beta_o},\ \ldots,\ \frac{\hat{\beta}_l}{\beta_o}\right] \qquad \text{(A.2.19e)}$$

$$\underline{m}_k = \left[-y_{k-1}, -y_{k-2}, \ldots, -y_{k-m}, \bar{\beta}_o u_{k-2}, \ldots, \bar{\beta}_o u_{k-1-1}\right] . \tag{A.2.19f}$$

Die Größe $\bar{\beta}_o$ wird zur Sicherung der Identifizierbarkeit vorgegeben und stellt einen Schätzwert des Parameters β_o dar (siehe Abschnitt A.2.1).

Das adaptive Regelgesetz lautet mit den geschätzten Parmetern

$$u_k = -\frac{1}{\bar{\beta}_o} \hat{\underline{p}}_k^T \underline{m}_{k+1} . \tag{A.2.20}$$

Für Betrachtung mit den Methoden der Hyperstabilitätstheorie ist es notwendig, die Fehlerdifferenzengleichung des gesamten Systems, das aus Regelstrecke, Parameterschätzverfahren und adaptivem Regelgesetz besteht, aufzustellen. Setzen wir das adaptive Regelgesetz in den ersten Term von Gl.(A.2.18b) ein, so ergibt sich:

$$C(z)\ Y(z) - \lambda E(z) = \frac{-\beta_o}{\bar{\beta}_o} \mathcal{Z}\{\hat{\underline{p}}_{k-1}^T \underline{m}_k\} + \mathcal{Z}\{\underline{p}^T \underline{m}_k\}$$

bzw. mit

$$h_o = \frac{\beta_o}{\bar{\beta}_o}$$

$$C(z)\ Y(z) - \lambda E(z) = -\mathcal{Z}\{h_o \hat{\underline{p}}_{k-1}^T \underline{m}_k - \underline{p}^T \underline{m}_k\} . \tag{A.2.21}$$

Führen wir den Parameterfehler

$$\tilde{\underline{p}}_{k-1} = h_o \hat{\underline{p}}_{k-1} - \underline{p} \tag{A.2.22}$$

ein, so kann Gl.(A.2.21) als Fehlerdifferenzengleichung

$$C(z)\ Y(z) - \lambda E(z) = -\mathcal{Z}\{\tilde{\underline{p}}_{k-1}^T \underline{m}_k\}$$

bzw.

$$Y(z) = \frac{1}{C(z)} \mathcal{Z}\{-\tilde{\underline{p}}_{k-1}^T \underline{m}_k\} + \lambda E(z) \tag{A.2.23}$$

des Parameterfehlers $\underline{\tilde{p}}$ interpretiert werden. Der inhomogene Teil $\lambda E(z)$ dieser Differenzengleichung beeinflußt die Stabilität nicht. Zur Untersuchung der Stabilität muß die LS-Methode gemäß Gl.(A.2.19) mit einbezogen werden. Aus Gl.(A.2.19a) läßt sich nach Multiplikation mit h_o und Subtraktion von $\underline{p}$ auf beiden Seiten als Differenzengleichung für den Parameterfehler die Beziehung

$$h_o\, \underline{\hat{p}}_k - \underline{p} \;= h_o\, \underline{\hat{p}}_{k-1} - \underline{p} + h_o\, \underline{g}_k\, \varepsilon_k$$

und mit Gl.(A.2.22)

$$\underline{\tilde{p}}_k = \underline{\tilde{p}}_{k-1} + h_o\, \underline{g}_k\, \varepsilon_k$$

bilden. Unter Verwendung von Gl.(A.2.19b) ergibt sich

$$\underline{\tilde{p}}_k = \underline{\tilde{p}}_{k-1} + h_o\, \underline{g}_k (y_k - \overline{\beta}_o\, u_{k-1} - \underline{\hat{p}}^T_{k-1}\, \underline{m}_k)$$

und mit dem adaptiven Regelgesetz gemäß Gl.(A.2.20)

$$\underline{\tilde{p}}_k = \underline{\tilde{p}}_{k-1} + h_o\, \underline{g}_k\, y_k \;. \qquad \text{(A.2.24)}$$

Führen wir die Bezeichnungen

$$-u_{1k} = y_{2k} = \underline{\tilde{p}}^T_{k-1}\, \underline{m}_k \qquad \text{(A.2.25)}$$

$$\mathfrak{Z}\{y_{1k}\} = \frac{-1}{C(z)}\, \mathfrak{Z}\{y_{2k}\} \qquad \text{(A.2.26)}$$

ein, so läßt sich die Fehlerdifferenzengleichung zusammen mit der aus der Differenzengleichung (A.2.24) gewonnenen Beziehung in dem in Bild A.2.4 dargestellten Blockschaltbild darstellen.

Der Nachweis der Hyperstabilität läßt sich leichter führen, wenn eine zusätzliche Rückkopplung des zeitvarianten Blocks eingeführt wird. Um die Gesamtstruktur nicht zu verändern, wird ein entsprechender Signalpfad auch für den linearen Teil des Blockschaltbilds

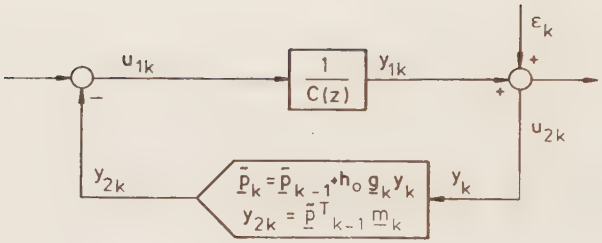

Bild A.2.4. Darstellung der Gln.(A.2.24), (A.2.25) und (A.2.26) in der nichtlinearen Standardstruktur

eingeführt. Der zusätzliche Signalpfad kann als stabilisierendes zusätzliches Fehlersignal betrachtet werden (Schmid (1979)). Damit ergibt sich die im Bild A.2.5. dargestellte Struktur.

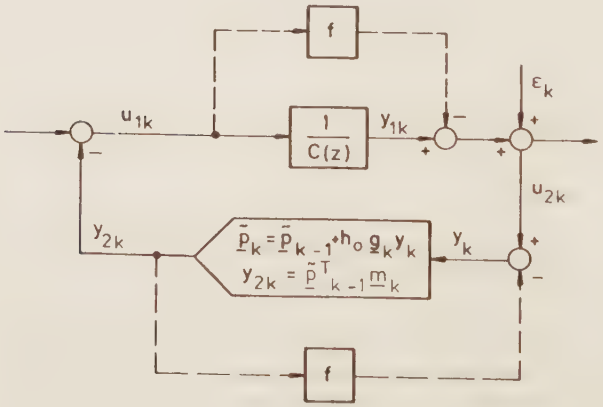

Bild A.2.5. Modifizierte Struktur für den ST-Regler

Zum eigentlichen Nachweis der Hyperstabilität stehen zwei Hilfsmittel zur Verfügung. Schmid (1979) konnte zeigen, daß ein zeitvariantes System der Form

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{A}_k \, \underline{x}_k + \underline{B}_k \, \underline{u}_k \qquad \forall k \geq 0 \tag{A.2.27a}$$

$$\underline{y}_k = \underline{C}_k \, \underline{x}_k + \underline{D}_k \, \underline{u}_k \qquad \forall k \geq 0 \tag{A.2.27b}$$

hyperstabil ist, falls $\underline{P}_k$ eine Folge von symmetrisch positiv definierten Matrizen ist, die folgenden Gleichungen genügt:

$$\underline{A}_k^T \, \underline{P}_{k+1} \, \underline{A}_k - \underline{P}_k = \underline{L}_k \, \underline{L}_k^T = -\underline{Q}_k \tag{A.2.28a}$$

$$\underline{B}_k^T \, \underline{P}_{k+1} \, \underline{A}_k - \underline{C}_k = -\underline{W}_k^T \, \underline{L}_k^T = -\underline{S}_k \tag{A.2.28b}$$

$$\underline{B}_k^T \, \underline{P}_{k+1} \, \underline{B}_k - (\underline{D}_k^T + \underline{D}_k) = -\underline{W}_k^T \, \underline{W}_k = -\underline{R}_k \; . \tag{A.2.28c}$$

Das zweite Hilfsmittel ist die Bedingung für schwache Hyperstabilität für ein zeitvariantes nichtlineares System. Ein zeitvariantes nichtlineares System ist gemäß Bild A.2.6 genau dann schwach hyperstabil, wenn für das System gemäß Bild A.2.6 mit der Ein-Ausgangsbeziehung

$$\underline{z}_{2k} = \underline{h}(\underline{z}_1, k) \qquad 1 \leq k \qquad \forall k \geq 0$$

die Ungleichung

$$\eta(0, k_1) = \sum_{k=0}^{k_1} \underline{z}_{2k}^T \, \underline{z}_k \geq -\gamma_o^2 \qquad \forall k_1 \geq 0 \tag{A.2.29}$$

erfüllt ist.

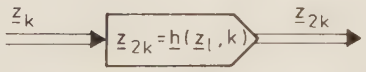

Bild A.2.6. Blockschaltbild eines nichtlinearen zeitvarianten Systems

Die zweite Beziehung zum Nachweis der schwachen Hyperstabilität kann auch auf das durch Gl.(A.2.27) und (A.2.28) beschriebene zeitvariante System angewandt werden. Gemäß Gl.(A.2.29) ergibt sich nach Zwischenrechnung:

$$\eta(0, k_1) = \frac{1}{2} \underline{x}_{k_1+1}^T \underline{P}_{k_1+1} \underline{x}_{k_1+1} - \frac{1}{2} \underline{x}_o \underline{P}_o \underline{x}_o$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=o}^{k_1} (\underline{W}_k \underline{u}_k + \underline{L}_k^T \underline{x}_k)^T (\underline{W}_k \underline{u}_k + \underline{L}_k^T \underline{x}_k). \qquad \text{(A.2.30)}$$

Für den Beweis der Hyperstabilität des ST-Reglers wird die Ungleichung (A.2.29) auf das in Bild A.2.5 dargestellte zeitvariante Teilsystem angewandt. Die entsprechende Ungleichung lautet:

$$\eta(0, k_1) = \eta_1(0, k_1) + \eta_2(0, k_1)$$

$$= \sum_{k=o}^{k_1} u_{2k} y_{2k} = \sum_{i=o}^{k_1} y_{2k} y_k + f \sum_{k=o}^{k_1} y_{2k}^2 \geq -\gamma_o^2 . \qquad \text{(A.2.31)}$$

Wird

$$\tilde{\underline{P}}_{k-1} = \underline{x}_k, \; y_k = \underline{u}_k, \; y_{2k} = \underline{y}_k$$

$$\underline{I} = \underline{A}_k, \; \underline{m}_k^T = \underline{C}_k, \; \underline{O} = \underline{D}_k$$

$$\frac{h_o \underline{\Lambda}_{k-1} \underline{m}_k}{\frac{1}{\rho} + \underline{m}_k^T \underline{\Lambda}_{k-1} \underline{m}_k} = \underline{B}_k \qquad \text{(A.2.32)}$$

$$r_k = \frac{h_o^2 \underline{m}_k^T \underline{\Lambda}_{k-1} \underline{P}_{k+1} \underline{\Lambda}_{k-1} \underline{m}_k}{(\frac{1}{\rho} + \underline{m}_k^T \underline{\Lambda}_{k-1} \underline{m}_k)^2} \qquad \text{(A.2.33a)}$$

$$\underline{S}_k = \frac{h_o \, \underline{P}_{k+1} \, \underline{\Lambda}_{k-1} \, \underline{m}_k}{\frac{1}{\rho} + \underline{m}_k^T \, \underline{\Lambda}_{k-1} \, \underline{m}_k} - \underline{m}_k \qquad \text{(A.2.33b)}$$

und

$$\underline{P}_{k+1} = \underline{P}_k - \underline{Q}_k \qquad \text{(A.2.34a)}$$

$$\underline{P}_k \, \underline{\Lambda}_{k-1} = \underline{I} \qquad \text{(A.2.34b)}$$

$$\underline{Q}_k = -2f \, \underline{m}_k \, \underline{m}_k^T \quad \text{mit } f = \frac{\rho}{2} \qquad \text{(A.2.34c)}$$

festgelegt, so kann für den ersten Term $\sum_{k=o}^{k_1} y_{2k} \, y_k$ in Gl.(A.2.31) die Beziehung gemäß Gl.(A.2.30) angewandt werden. Die Beziehungen gemäß Gl.(A.2.34) stellen dabei das Nachstellgesetz der Kovarianzmatrix gemäß Gl.(A.2.19d) in inverser Form dar. Das Nachstellgesetz

$$\underline{\Lambda}_k^{-1} = \underline{\Lambda}_k^{-1} + \rho \, \underline{m}_k \, \underline{m}_k^T$$

kann durch Anwendung des Matrizeninversionslemmas in Gl.(A.2.19d) überführt werden.

Wir erhalten für den ersten Term von Gl.(A.2.31) unter Verwendung von Gl.(A.2.30):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=o}^{k_1} y_{2k} \, y_k &= \frac{1}{2} \, \tilde{p}_{k_1}^T \, \underline{P}_{k_1+1} \, \tilde{p}_{k_1} - \frac{1}{2} \, \tilde{p}_o^T \, \underline{P}_o \, \tilde{p}_o \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=o}^{k_1} r_k \, y_k^2 + 2 \underline{s}_k^T \, \tilde{p}_{k-1} \, y_k + \tilde{p}_{k-1}^T \, \underline{Q}_k \, \tilde{p}_{k-1} \\
&= \frac{1}{2} \, \tilde{p}_{k_1}^T \, \underline{P}_{k_1+1} \, \tilde{p}_{k_1} - \frac{1}{2} \, \tilde{p}_o^T \, \underline{P}_o \, \tilde{p}_o \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=o}^{k_1} \frac{\rho h_o^2 \, \underline{m}_k^T \, \underline{\Lambda}_{k-1} \, \underline{m}_k \, y_k^2}{\frac{1}{\rho} + \underline{m}_k^T \, \underline{\Lambda}_{k-1} \, \underline{m}_k} \\
&\quad + \sum_{k=o}^{k_1} \underbrace{\underline{m}_k^T \, \tilde{p}_{k-1}}_{y_{2k}} \, y_k (\rho h_o - 1) - \frac{\rho}{2} \sum_{k=o}^{k_1} (\underline{m}_k^T \, \tilde{p}_{k-1})^2 .
\end{aligned} \qquad \text{(A.2.35)}$$

Die zweite Summe $f \sum_{k=o}^{k_1} y_{2k}^2$ ergibt

$$\eta_2(O, k_1) = \frac{\rho}{2} \sum_{k=o}^{k_1} (\underline{m}_k^T \tilde{\underline{p}}_{k-1})^2 . \qquad (A.2.36)$$

Für $\eta(O, k_1)$ erhalten wir gemäß Gl.(A.2.31) unter Verwendung von $y_{2k} = \tilde{\underline{p}}_{k-1}^T \underline{m}_k$

$$\eta(O, k_1) = \frac{1}{2} \tilde{\underline{p}}_{k_1}^T \underline{P}_{k_1+1} \underline{p}_{k_1} - \frac{1}{2} \tilde{\underline{p}}_o^T \underline{P}_o \tilde{\underline{p}}_o$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=o}^{k_1} \frac{\rho h_o^2 \underline{m}_k^T \underline{\Lambda}_{k-1} \underline{m}_k y_k^2}{\frac{1}{\rho} + \underline{m}_k^T \underline{\Lambda}_{k-1} \underline{m}_k}$$

$$+ \sum_{k=o}^{k_1} y_2 y_k (\rho h_o - 1) . \qquad (A.2.37)$$

Der letzte Term stellt die mit $(\rho h_o - 1)$ gewichtete Beziehung für $\eta_1(O, k_1)$ dar. Die Bedingung für $\eta(O, k_1)$ kann mit

$$\mu^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=o}^{k_1} \frac{\rho h_o^2 \underline{m}_k^T \underline{\Lambda}_{k-1} \underline{m}_k y_k^2}{\frac{1}{\rho} + \underline{m}_k^T \underline{\Lambda}_{k-1} \underline{m}_k} \qquad (A.2.38)$$

in die Form

$$\eta(O, k_1) = \frac{1}{2} \tilde{\underline{p}}_{k_1}^T \underline{P}_{k_1+1} \tilde{\underline{p}}_{k_1} - \frac{1}{2} \tilde{\underline{p}}_o^T \underline{P}_o \tilde{\underline{p}}_o$$

$$+ \mu^2 + \eta_1(O, k_1)(\rho h_o - 1) \qquad (A.2.39)$$

gebracht werden. Mit

$$\eta(O, k_1) = \eta_1(O, k_1) + \frac{\rho}{2} \sum_{k=o}^{k_1} \underline{m}_k^T \tilde{\underline{p}}_{k-1}$$

ergibt sich für

$$\eta_1(0, k_1)(2-\rho h_o) = -\frac{\rho}{2} \sum_{k=o}^{k_1} (\underline{m}_k^T \tilde{\underline{p}}_{k-1})^2$$

$$+ \frac{1}{2} \tilde{\underline{p}}_{k_1}^T \underline{p}_{k_1+1} \tilde{\underline{p}}_{k_1} - \frac{1}{2} \tilde{\underline{p}}_o^T \underline{p}_o \tilde{\underline{p}}_o + \mu^2$$

bzw.

$$\eta_1(0, k_1) = \frac{1}{2-\rho h_o} \left[-\frac{\rho}{2} \sum_{k=o}^{k_1} (\underline{m}_k^T \tilde{\underline{p}}_{k-1})^2 + \frac{1}{2} \tilde{\underline{p}}_{k_1}^T \underline{p}_{k_1+1} \tilde{\underline{p}}_{k_1} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \tilde{\underline{p}}_o^T \underline{p}_o \tilde{\underline{p}}_o + \mu^2 \right]$$

und damit für

$$\eta(0, k_1) = \frac{1}{2-\rho h_o} \left[\frac{\rho}{2} (1-\rho h_o) \sum_{k=o}^{k_1} (\underline{m}_k^T \underline{p}_{k-1})^2 + \frac{1}{2} \tilde{\underline{p}}_{k_1}^T \underline{p}_{k_1+1} \tilde{\underline{p}}_{k_1} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \tilde{\underline{p}}_o^T \underline{p}_o \tilde{\underline{p}}_o + \mu^2 \right] . \qquad \text{(A.2.40)}$$

$\eta(0, k_1)$ ist sicherlich nur dann größer einer negativen Zahl $-\gamma_o^2$, falls

$$1 - \rho h_o \geq 0 \qquad \text{(A.2.41)}$$

gilt. Dies bedeutet, daß der gewählte Koeffizient β_o der Bedingung

$$\overline{\beta}_o \geq \rho \beta_o \qquad \text{(A.2.42)}$$

genügen muß.

Das Gesamtsystem aus dem linearen, zeitinvarianten Teil und dem schwach hyperstabilen Teil ist genau dann hyperstabil, falls das lineare Teilsystem mit der Übertragungsfunktion $G_L(z) = \frac{1}{C(z)} - \frac{\rho}{2}$ (siehe Bild A.2.5) streng positiv reell ist. Diese Bedingung kann nur für

$$0 \leq \rho < 2 \qquad \text{(A.2.43)}$$

erfüllt werden (Schmid (1979)).

A.2.3.3. Vergleich der beiden Methoden nach Ljung (1977a,b) und Schmid (1979)

Beide Methoden, die nur hinreichende Bedingungen angeben, sind nur sehr eingeschränkt miteinander zu vergleichen.

Die Methode mit der assoziierten Differentialgleichung bietet den Vorteil, daß die Trajektorien des Differentialgleichungssystems den Verlauf der Parameter angeben. Der Beweis der global asymptotischen Stabilität muß allerdings getrennt geführt werden.

Bei den Methoden der Hyperstabilität können keine Trajektorien gewonnen werden, aber die Benutzung der Parameter-Fehlerdifferenzengleichung liefert die Bedingungen, unter denen die Parameter des ST-Reglers gegen die Parameter des MV-Reglers konvergieren.

A.2.4. Führungsgrößenregelung

Der MV-Regler, ebenso wie der ST-Regler, sind Regler, die eine stochastische Störung minimieren. Für den Fall eines Führungssignals ungleich Null schlägt Wittenmark (1973) für den ST-Regler die Einführung eines zusätzlichen Integrators im Regler vor. Diese Modifikation soll im folgenden kurz dargestellt werden.

Für den Fall eines Führungssignals w ungleich Null wird der Regler nicht mehr für das Gütekriterium der minimalen Varianz der Reglergröße entworfen, sondern für die Differenz des Führungs- und des Ausgangssignals.

Analog zu Gl.(A.1.3) lautet das entsprechende Kriterium:

$$E\{(w(k) - y(k))^2\} \stackrel{!}{=} \min . \qquad (A.2.44)$$

Für den Fall, daß keine Störung vorhanden ist und die Regelgröße mit dem vorgegebenen Führungssignal exakt übereinstimmen soll, ergibt sich als notwendiges Stellsignal aus der Forderung

$$Y(z) = W(z)$$

mit der Beziehung

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d} U(z)$$

zwischen Ein- und Ausgangssignal der Regelstrecke das entsprechende Stellsignal u_r

$$U_r(z) = \frac{A(z)}{B(z)} z^{d} W(z) . \qquad (A.2.45)$$

Dieses Stellsignal kann nur berechnet werden, falls das Führungssignal bereits d-Schritte im voraus bekannt ist. Nach Umformung von Gl.(A.2.45) zur folgenden Beziehung

$$U_r(z) B(z) = A(z) z^{d} W(z) \qquad (A.2.46)$$

kann die Systembeschreibung gemäß Gl.(A.1.9) durch Subtraktion von Gl.(A.2.46) erweitert werden. Falls die stochastische Störung vorhanden ist, erhalten wir

$$A(z) (Y(z) - W(z)) z^{d} = B(z)(U(z) - U_r(z)) + \lambda C(z) z^{d} E(z) . \qquad (A.2.47)$$

Führen wir zwei Hilfssignale

$$Y^*(z) = Y(z) - W(z) \qquad (A.2.48)$$

und

$$U^*(z) = U(z) - U_r(z) \qquad (A.2.49)$$

ein, dann ergibt sich eine zu Gl.(A.1.9) formal gleiche Systembeschreibung. Das Regelgesetz für das Kriterium gemäß Gl.(A.2.44) lautet analog zu Gl.(A.1.18)

$$\frac{U^*(z)}{Y^*(z)} = \frac{U(z) - U_r(z)}{Y(z) - W(z)} = \frac{-K(z)}{B(z)\ F(z)} \qquad (A.2.50)$$

bzw. nach U(z) umgeformt

$$U(z) = \frac{-K(z)}{B(z)\ F(z)} Y(z) + \frac{K(z)}{B(z)\ F(z)} W(z) + U_r(z) . \qquad (A.2.51)$$

Unter Verwendung der Identitätsgleichung Gl.(A.1.10) und Gl. (A.2.45) erhalten wir:

$$U(z) = \frac{-K(z)}{B(z)\ F(z)}\ Y(z) + \frac{z^d\ C(z)}{B(z)\ F(z)}\ W(z)\ . \qquad (A.2.52)$$

Wird nur ein konstanter Sollwert $\bar{w} \neq 0$ angestrebt, so kann, da der zukünftige Sollwert dem momentanen Wert entspricht, der Stellsignalanteil u_r gemäß

$$u_r = \frac{A(1)}{B(1)}\ \bar{w} \qquad (A.2.53)$$

berechnet werden.

Besitzt die Regelstrecke einen Integralanteil, wird die stationäre Regelabweichung ebenso wie u_r stets Null. Für den Fall, daß die Regelstrecke keinen Integralanteil besitzt, schlägt Wittenmark (1973) vor, diesen Integralanteil zu erzwingen. Als Eingangssignal der Strecke wird das Inkrement der Stellgröße betrachtet. Die ursprüngliche Systemgleichung Gl.(A.1.9) kann mit dem Inkrement

$$\Delta U(z) = (1 - z^{-1})\ U(z)$$

wie folgt umgeformt werden:

$$A(z)\ z^d\ Y(z) = \frac{B(z)\ \Delta U(z)}{1 - z^{-1}} + C(z)\ z^d\ E(z)$$

bzw.

$$A(z)(1 - z^{-1})\ z^d Y(z) = B(z)\ \Delta U(z) + C(z)(1 - z^{-1})\ z^d E(z)\ . \qquad (A.2.54)$$

Das entsprechende Regelgesetz für den MV-Regler lautet

$$\Delta U(z) = \frac{-K(z)(1 - z^{-1})}{B(z)\ F(z)}\ [Y(z) - W(z)]\ . \qquad (A.2.55)$$

Der Minimum-Varianz-Regler enthält im Zähler den zusätzlichen Term $(1 - z^{-1})$, da bei der Identitätsgleichung für Gl.(A.2.54)

$$C(z)(1-z^{-1}) = F(z)\ A(z)(1-z^{-1}) + z^{-d}\ K^*(z)$$

der Term $1-z^{-1}$ Teiler von $K^*(z)$ sein muß. Der erzwungene Integrator wird deshalb beim MV-Regler unwirksam. Beim ST-Regler wird das Zähler- und das Nennerpolynom des Reglers geschätzt. Eine vollständige Kompensation des Integrators ist aufgrund der Ungenauigkeit der Schätzung fast nie möglich. Der Integrator bleibt, wie Wittenmark (1973) an einigen Beispielen zeigen konnte, erhalten und damit wirksam. Zur Schätzung des Reglers werden entsprechend zu Gl.(A.2.55) die Inkrementwerte des Stellsignals und die Differenz $y(k) - w(k)$ verwendet.

A.2.5. Erweiterung des ST-Reglers durch Bewertung von Führungsgröße und Stellgröße (Clarke und Gawthrop (1975))

Zur Einbeziehung des Stell- und Führungssignals empfiehlt es sich, das in Gl.(A.1.8) eingeführte Kriterium der minimalen Varianz zu erweitern. Wir erhalten als erweitertes Gütefunktional für Ausgangs-, Stell- und Führungssignal analog zu Gl.(A.1.40)

$$I_4 = E\{(y(k+d) - w(k))^2 + u^2(k)\}\ . \qquad (A.2.56)$$

Die Lösung der Optimierungsaufgabe, das Stellsignal u(k) im Sinne eines minimalen Gütefunktionals zu wählen, führt auf das Problem eines sogenannten "linear quadratischen Gaußschen Problems" (Aström (1978)). Da y(k+d) von u(k) abhängt, kann der Erwartungswert nur unter Zuhilfenahme der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsgröße u(k) bzw. der Zufallsgröße e(k) berechnet werden (MacGregor, Tidwell (1977)). Eine Lösung kann entweder mittels Faktorisierung oder bei Transformation der Systembeschreibung in den Zustandsraum durch Lösen einer Matrix-Riccati-Gleichung geschehen. Der große numerische Aufwand, der bei jedem Abtastschritt zur Berechnung des Reglers aufgebracht werden muß, hat zur Folge, daß das Gütefunktional I_4 kaum für den ST-Regler Verwendung findet (MacGregor und Tidwell (1977)), (Clarke und Gawthrop (1975, 1979a,b)), (Gawthrop (1977)). Clarke und Gawthrop schlagen deshalb die Verwendung eines anderen Gütefunktionals vor. Sie bewerten jeweils die Ausgangsgröße y(k), die Stellgröße u(k) und die Führungsgröße w(k) mit einer Übertragungsfunktion. Ähnlich wie es Aufgabe des MV-Regelgesetzes ist, das Stellsignal zum Zeitpunkt k in der Art zu wählen,

daß die Vorhersage des Ausgangssignals zum zukünftigen Zeitpunkt k + d identisch Null ist, fordern Clarke und Gawthrop nach Einführung des bewerteten Ausgangssignals

$$\phi_y(z) = P(z)\ Y(z),$$

daß für die Vorhersage

$$\phi(k+d/k) = \phi_y(k+d/k) = \mathcal{Z}^{-1}\{R(z)\ W(z)\} + \mathcal{Z}^{-1}\{Q(z)\ U(z)\} \stackrel{!}{=} 0$$

gilt. Damit erhalten wir als Gütefunktional

$$I_5 = \phi(k+d/k) = \phi_y(k+d/k) - \mathcal{Z}^{-1}\{R(z)W(z)\} + \mathcal{Z}^{-1}\{Q(z)U(z)\}. \quad (A.2.57)$$

Die Übertragungsfunktionen P(z), R(z), Q(z) mit

$$P(z) = \frac{P_Z(z)}{P_N(z)} \quad ; \quad R(z) = \frac{R_Z(z)}{R_N(z)} \quad ; \quad Q(z) = \frac{Q_Z(z)}{Q_N(z)} \quad ,$$

stellen die Übertragungsfunktionen dar, die Ausgangs-, Führungs- und Stellsignal bewerten.

Betrachten wir das bei der Herleitung des MV-Reglers verwendete Streckenmodell gemäß Bild A.1.4, dann läßt sich das obige Gütefunktional (Gl.(A.2.57)) als Ausgang eines erweiterten Regelstrekkenmodells gemäß Bild A.2.7 beschreiben.

Bei Verwendung des Gütefunktionals I_5 besteht die Aufgabe des ST-Reglers in der Vorhersage des Signals $\phi(k+d/k)$ bzw. da die durch das Stellsignal und Führungssignal beeinflußten Anteile vollständig bekannt sind, in der Vorhersage des Signals $\phi_y(k+d/k)$.

Das Signal $\phi_y(k+d)$, das durch die stochastische Störung beeinflußt wird, kann in ähnlicher Weise, wie dies in Abschnitt A.1.2 für den MV-Regler erfolgte, zerlegt werden.

Mit

$$\phi_y(z) = \frac{P_Z(z)}{P_N(z)}\ Y(z), \quad \mathrm{Grad}\{P_N\} = n_{PN}, \quad \mathrm{Grad}\{P_Z\} = n_{PZ}$$

$$= \frac{P_Z(z)B(z)}{P_N(z)A(z)}\ z^{-d}\ U(z) + \lambda\ \frac{C(z)}{A(z)}\ \frac{P_Z(z)}{P_N(z)}\ E(z) \qquad (A.2.58)$$

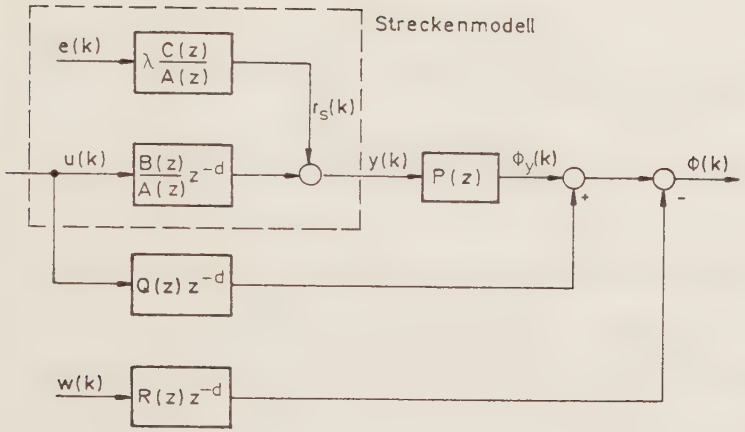

Bild A.2.7. Erweitertes Streckenmodell nach Clarke und Gawthrop mit der Hilfsgröße ϕ

und einer "modifizierten Identitätsgleichung"

$$\frac{C(z)}{A(z)}\,\frac{P_Z(z)}{P_N(z)} = F_1(z) + \frac{z^{-d}\,K_1(z)}{A(z)P_N(z)} \qquad \text{(A.2.59)}$$

mit

$$F_1(z) = 1 + f_1 z^{-1} + \ldots\; f_{d-1}\; z^{-d+1}$$

$$K_1(z) = k_o + k_1 z^{-1} + \ldots\; k_{n+n_{PN}-1}\; z^{-n-n_{PN}+1}$$

erhalten wir

$$\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d)\} = \frac{P_Z(z)B(z)}{P_N(z)A(z)}\,U(z) + \frac{\lambda\,K_1(z)}{P_N(z)A(z)}\,E(z) + \lambda\,F_1(z)E(z)z^d\,. \qquad \text{(A.2.60)}$$

Aus Gl.(A.2.58) folgt:

$$\lambda\,E(z) = \frac{P_N(z)A(z)}{P_Z(z)C(z)}\,\phi_y(z) - \frac{P_Z(z)B(z)}{P_N(z)A(z)}\,\frac{P_N(z)A(z)}{P_Z(z)C(z)}\,z^{-d}\,U(z)\,. \qquad \text{(A.2.61)}$$

Unter Verwendung der "modifizierten Identitätsgleichung" Gl.(A.2.59) ergibt sich für

$$\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d)\} = \frac{K_1(z)}{P_N(z)C(z)}\, Y(z) + \frac{F_1(z)B(z)}{C(z)}\, U(z) + \lambda\, F_1(z)z^d\, E(z) \quad . \qquad (A.2.62)$$

Der vorhersagbare Anteil von $\phi_y(k+d)$ läßt sich durch

$$\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\} = \frac{K_1(z)}{P_N(z)C(z)}\, Y(z) + \frac{F_1(z)B(z)}{C(z)}\, U(z) \qquad (A.2.63)$$

beschreiben.

Das Stellgesetz ergibt sich aus der Bedingung $I_5 = \phi(k+d/k) \stackrel{!}{=} 0$ gemäß Gl.(A.2.57) zu:

$$\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\} - R(z)\, W(z) + Q(z)\, U(z) \stackrel{!}{=} 0$$

oder

$$\frac{K_1(z)}{P_N(z)C(z)}\, Y(z) + \frac{F_1(z)B(z)}{C(z)}\, U(z) - R(z)\, W(z) + Q(z)\, U(z) \stackrel{!}{=} 0 \quad . \qquad (A.2.64)$$

Nach U(z) aufgelöst erhalten wir:

$$U(z) = \frac{C(z)R(z)W(z) - \frac{K_1(z)}{P_N(z)}\, Y(z)}{F_1(z)B(z) + Q(z)C(z)} \quad . \qquad (A.2.65)$$

Für eine Realisierung als ST-Regler, d.h. für eine Schätzung des Prädiktors, kann Gl.(A.2.57) zusammen mit Gl.(A.2.63) benutzt werden. Wir erhalten

$$\mathcal{Z}\{\phi(k+d/k)\} = \mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\} - R(z)\, W(z) + Q(z)\, U(z)$$

$$= \frac{K_1(z)}{P_N(z)C(z)}\, Y(z) + \frac{F_1(z)B(z) + Q(z)C(z)}{C(z)}\, U(z) - \frac{C(z)R(z)W(z)}{C(z)} \quad . \qquad (A.2.66)$$

Führen wir ein gefiltertes Ausgangssignal ein, das durch die Beziehung

$$Y_f(z) = \frac{Y(z)}{P_N(z)} \tag{A.2.67}$$

definiert ist, so erhalten wir für die Vorhersage von $\phi(k+d)$:

$$\mathfrak{Z}\{\phi(k+d/k)\} = \frac{K_1(z)}{C(z)} Y_f(z) + \frac{F_1(z)B(z) + Q(z)C(z)}{C(z)} U(z) - \frac{C(z)\ R(z)}{C(z)} W(z). \tag{A.2.68}$$

Definieren wir

$$\begin{aligned} K_1(z) &= A^*(z) \\ F_1(z)\ B(z) + Q(z)\ C(z) &= B^*(z) \\ -C(z)\ R(z) &= C^*(z) \end{aligned} \tag{A.2.69}$$

und führen zusätzlich den Gleichungsfehler $\varepsilon(z)$ (Unbehauen et al. (1974)) ein, so läßt sich der Prädiktor

$$\mathfrak{Z}\{\phi(k+d/k)\} = A^*(z)\ Y_f(z) + B^*(z)\ U(z) + C^*(z)\ W(z) + \varepsilon(z) \tag{A.2.70}$$

mit der LS-Methode schätzen. Das im Nenner vorhandene Polynom C(z) wird mit der gleichen Argumentation wie beim einfachen ST-Regler nach Aström und Wittenmark (1973) vernachlässigt (s.a. Abschnitt A.2.1). Zur Erfüllung der Identifizierbarkeitsbedingungen muß kein zusätzlicher Parameter frei gewählt werden, da der niedrigste Koeffizient des Polynoms $C^*(z)$ zu Eins gewählt wird.

Diese auf den ersten Blick sehr einfache Schätzung bringt allerdings einige Nachteile mit sich:

1. Falls die Stellbewertung während des Betriebs verändert wird, bedeutet dies, daß auch die Parameter der Schätzgleichung eine neue Ruhelage besitzen. Falls die Kovarianzmatrix bereits sehr kleine Werte besitzt, muß sie evtl. rückgesetzt werden.

2. Die Zahl der geschätzten Parameter kann von Q(z) abhängen und sich bei Erhöhung oder Erniedrigung der Ordnung von Q(z) verändern.

3. Q(z) kann sinnvollerweise nur als Polynom gewählt werden.

4. Für eine gute Schätzung muß sichergestellt werden, daß W(z) eine genügende Anregung enthält.

Ein anderer Vorschlag von Clarke und Gawthrop (1979a) zielt darauf ab, nur den Prädiktor $\phi_y(k+d/k)$ zu schätzen. Wir definieren analog zu Gl.(A.2.63) das Modell mit dem zusätzlichen Schätzfehler mit

$$\hat{B}_f(z) = \hat{F}_1(z)\,\hat{B}(z)$$

$$\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\} = \frac{\hat{K}_1(z)}{P_N(z)\hat{C}(z)}\,Y(z) + \frac{\hat{B}_f(z)}{\hat{C}(z)}\,U(z) + \varepsilon(z) \qquad \text{(A.2.71)}$$

bzw. mit Einführung des gefilterten Ausgangssignals gemäß Gl. (A.2.67a)

$$\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\} = \frac{\hat{K}_1(z)}{\hat{C}(z)}\,Y_f(z) + \frac{\hat{B}_f(z)}{\hat{C}(z)}\,U(z) + \varepsilon(z)\,. \qquad \text{(A.2.72)}$$

Da das Regelgesetz <u>nicht</u> so gewählt wird, daß $\phi_y(k+d/k)$ Null wird, kann das Polynom C(z) im Nenner nicht mehr vernachlässigt werden. Die vergangenen Vorhersagewerte $\phi_y(k+d-i/k)$ werden durch die Näherungen $\phi_y(k+d-i/k-i)$ ersetzt. Damit kann die 2. Erweiterte Matrizenmethode (2. EM-Methode) als Parameterschätzverfahren verwendet werden. Die 2. EM-Methode ist sicherlich nicht so robust wie die LS-Methode, sie ermöglicht in diesem Fall aber den Wegfall der obigen einschränkenden Bedingungen und ist deshalb vorzuziehen.

Für die Berechnung des Stellsignals empfiehlt es sich bei der Schätzung von $\phi_y(k+d/k)$ nicht von Gl.(A.2.65) auszugehen, sondern Gl.(A.2.66) zu verwenden. Das Stellsignal berechnet sich zu

$$U(z) = \frac{R(z)\,W(z) - \mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\}}{Q(z)}\,. \qquad \text{(A.2.73)}$$

Berechnen wir zuerst ein Stellsignal U'(z), das die Bedingung

$$R(z)\,W(z) - \mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\} = 0 \qquad \text{(A.2.74)}$$

erfüllt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} R(z)\,W(z) - \mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\} &= -\mathcal{Z}\{\phi_y(k+d/k)\} + b_o\,U(z) \\ &\quad + R(z)\,W(z) - b_o\,U(z) \\ &= + b_o\,U'(z) - b_o\,U(z) \end{aligned} \qquad \text{(A.2.75)}$$

b_o stellt dabei den ersten Koeffizienten von $B_f(z)$ gemäß Gl. (A.2.72) dar.

Als endgültiges Stellsignal U(z) ergibt sich mit Gl.(A.2.73)

$$U(z) = \frac{b_o U'(z) - b_o U(z)}{Q(z)}$$

$$U(z) = \frac{1}{1 + \frac{Q(z)}{b_o}} U'(z) \qquad \text{(A.2.76)}$$

Damit ist die Berechnung des Stellsignals in zwei Teile zerlegt. In einem ersten Schritt wird das von der Stellbewertung unabhängige u'(k) berechnet und in einem zweiten Schritt die Gewichtung durch Q(z) miteinbezogen.

A.2.5.1. Darstellung des geschlossenen Regelkreises und der Führungs- und Störübertragungsfunktion

Der im letzten Abschnitt behandelte Algorithmus läßt sich gemäß Bild A.2.8 als Blockschaltbild darstellen.

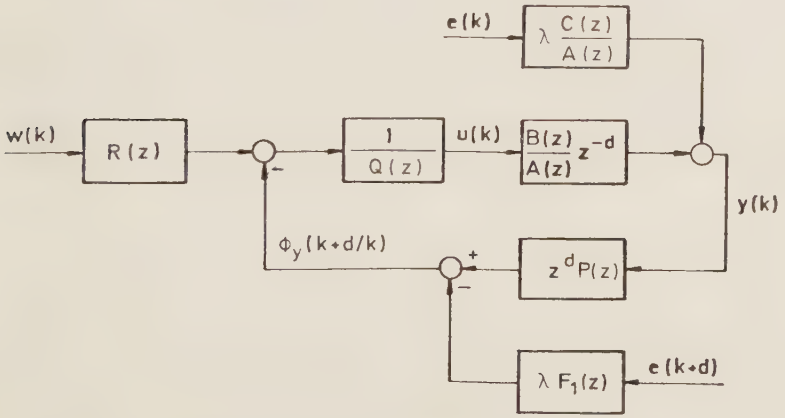

Bild A.2.8. Blockschaltbild der Regelung

Die Gesamtkonfiguration stellt ein kausales System dar, obwohl einzelne Teilblöcke diese Bedingung nicht erfüllen.

Für die Ausgangsgröße folgt aus Bild A.2.8:

$$Y(z) = \frac{B(z)\,R(z)\,z^{-d}}{P(z)\,B(z) + Q(z)\,A(z)}\,W(z) + \lambda\frac{F_1(z)\,B(z) + Q(z)\,C(z)}{P(z)\,B(z) + Q(z)\,A(z)}\,E(z)\,. \tag{A.2.77}$$

Für das Stellsignal u(k) ergibt sich:

$$U(z) = \frac{1}{P(z)\,B(z) + A(z)\,Q(z)}\left[R(z)\,A(z)\,W(z) - \frac{F_1(z)}{P_N(z)}\,\lambda\,E(z)\right] \tag{A.2.78}$$

Das Stellsignal U(z) bleibt unbeschränkt, falls

$$P(z)\,B(z) + Q(z)\,A(z) = 0$$

nur Nullstellen innerhalb des Einheitskreises besitzt. Liegen Nullstellen von B(z) außerhalb des Einheitskreises, kann durch geschickte Vorgabe von P(z) und Q(z) die Stabilität des geschlossenen Regelkreises sichergestellt werden. Eine Überprüfung der ST-Regeleigenschaften kann mittels der Korrelationsfunktionen $r_{\phi\phi}(\tau)$ und $r_{u\phi}(\tau)$ geschehen. Für den Fall, daß der Prädiktor $\phi(k+d/k)$ direkt mittels der LS-Methode geschätzt wird und die identifizierten Parameter gegen feste Werte konvergieren, läßt sich analog zu Åström und Wittenmark (1973) nachweisen, daß für die Korrelationsfunktionen

$$r_{\phi\phi}(\tau) = 0 \qquad \tau \geq d$$

$$r_{u\phi}(\tau) = 0 \qquad \tau \geq d$$

gilt. Für den Fall, daß

$$C(z) - 1/2$$

streng positiv reell ist, wurde von Gawthrop (1979) nachgewiesen, falls der Bewertungsfaktor der LS-Methode gleich 1 ist und das quadratische Produkt aus Kovarianzmatrix und Signalwert gegen Null strebt,

daß der erweiterte ST-Regler gegen den optimalen ST-Regler im Sinne des erweiterten Gütefunktionals strebt.

A.3. Die Bestimmung der Dämpfung d und der Kreisfrequenz ω_o für ein PT_2S-Glied mit einer Nullstelle bei s gleich Eins

Für die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1 - s}{1 + \frac{2ds}{\omega_o} + \frac{s^2}{\omega_o^2}} \tag{A.3.1}$$

lautet die zugehörige Sprungantwort

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-d^2}}\, e^{-d\omega_o t}\left[\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\; t - \varphi_D) + \omega_o \sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\; t\right]$$

$$\text{mit } \varphi_D = \arcsin d \; . \tag{A.3.2}$$

Die Gewichtsfunktion ergibt sich zu

$$g(t) = \frac{\omega_o}{\sqrt{1-d^2}}\, e^{-d\omega_o t}\left[\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\; t - \omega_o \cos\omega_o(\sqrt{1-d^2}\; t + \varphi_D)\right] . \tag{A.3.3}$$

Die Extremwerte der Übergangsfunktion können durch Nullsetzen der Gewichtsfunktion bestimmt werden.

Als erste Nullstelle (Hauptwert) erhalten wir aus Gl.(A.3.3) nach Zwischenrechnung für den Zeitpunkt t_u

$$\sqrt{1-d^2}\; \omega_o t_u = \arctan \frac{\sqrt{1-d^2}\,\omega_o}{1 + d\omega_o} \tag{A.3.4}$$

$$= \arctan x \; .$$

Der Wert des Unterschwingens e_u bestimmt sich mit

$$e_u = -h(t_u)$$

nach kurzer Zwischenrechnung zu

$$e_u = -1 + \frac{e}{\sqrt{1-d^2}} \; \sqrt{1 + 2d\omega_o + \omega_o^2} \; . \qquad (A.3.5)$$

Der Wert des Überschwingens beträgt

$$e_{max} = h(t_{max}) - 1 = \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} \; e \; \sqrt{1 + 2d\omega_o + \omega_o^2} \; . \qquad (A.3.6)$$

Der Vergleich von Gl.(A.3.5) und Gl.(A.3.6) liefert die Beziehung

$$\frac{e_u+1}{e_{max}} = -e^{\frac{d}{\sqrt{1-d^2}}\pi} \qquad (A.3.7)$$

oder für e_u und e_{max} in Prozent:

$$e_u = e_{max} \; e^{\pi\frac{d}{\sqrt{1-d^2}}} - 100\% \; . \qquad (A.3.8)$$

Für gleiches Über- und Unterschwingen kann aus Gl.(A.3.8) die Dämpfung d bestimmt werden.
Es ergibt sich

$$1 = e^{\pi\frac{d}{\sqrt{1-d^2}}} - \frac{100\%}{e_{max}} \qquad (A.3.9)$$

und umgeformt

$$d = \frac{-\ln \frac{e_{max}}{100 + e_{max}}}{\sqrt{(\ln \frac{e_{max}}{100+e_{max}})^2 + \pi^2}} \qquad (A.3.10)$$

Die Kreisfrequenz ω_o kann aus Gl.(A.3.5) mit d gemäß Gl.(A.3.10) gewonnen werden.

Die Funktion, deren Nullstelle gesucht wird, lautet

$$p(\omega_o) = 100\,\% \sqrt{1+2d\omega_o+\omega_o^2}\; e^{\frac{-d}{\sqrt{1-d^2}} \arctan \frac{\sqrt{1-d^2}\,\omega_o}{1+d\omega_o} + \pi} - e_{max} \stackrel{!}{=} 0 \,. \tag{A.3.11}$$

Für die entsprechende Ableitung zur Lösung mittels Newtonschem Verfahren erhalten wir:

$$\frac{dp}{d\omega_o} = 100\,\% \frac{\omega_o}{\sqrt{1+2d\omega_o+\omega_o^2}} \cdot e^{-\frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-d^2}\,\omega_o}{1+d\omega_o} + \pi\right)} \,. \tag{A.3.12}$$

A.4. Der Zusammenhang für die Verzugszeit t_{50} und die Anstiegszeit T_{a50} für ein PT_2S-Glied mit und ohne Nullstelle

A.4.1. Der Zusammenhang für die Verzugszeit t_{50} für ein kontinuierliches PT_2S-Glied mit und ohne Nullstelle

Die Verzugszeit t_{50} stellt definitionsgemäß die Zeit dar, bei der die Übergangsfunktion einer Regelstrecke mit P-Verhalten 50 % des Endwerts erreicht hat. Mit Gl.(3.2.7) ergibt sich für ein PT_2S-Glied ohne Nullstelle:

$$h(t_{50}) = 1 - e^{-d\omega_o t_{50}} \left[\frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\ t_{50} + \cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\ t_{50} \right] \stackrel{!}{=} 0{,}5 \,. \tag{A 4.1}$$

Für ein PT_2S-Glied mit Nullstelle erhalten wir entsprechend Gl. (3.2.14)

$$h^*(t_{50}^*) = h(t_{50}^*) + \frac{1}{\kappa\omega_o}\, g(t_{50}^*) \stackrel{!}{=} 0.5 \tag{A 4.2}$$

und mit den Gln.(3.2.7) und (3.2.8) folgt dafür

$$h^*(t_{50}) = 1 - e^{-d\omega_o t_{50}^*} \left[\frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\ t_{50}^* + \cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\ t_{50}^* \right]$$

$$+ \frac{1}{\kappa\sqrt{1-d^2}}\, e^{-d\omega_o t_{50}^*} \sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\ t_{50}^*$$

$$= 1 + e^{-d\omega_o t_{50}^*} \left[\left(\frac{1}{\kappa\sqrt{1-d^2}} - \frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \right) \sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\ t_{50}^* \right.$$

$$\left. - \cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\ t_{50}^* \right] \stackrel{!}{=} 0.5 \tag{A 4.3}$$

Durch Einführung der Differenzzeit $t_1 = t^*_{50} - t_{50}$ zwischen den Verzugszeiten eines PT_2S-Glieds mit und ohne Nullstelle ergibt sich aus Gl.(A 4.3)

$$h^*(t^*_{50}) = 1+e^{-d\omega_o t_{50}-d\omega t_1}\left[\left(\frac{1}{\kappa\sqrt{1-d^2}}-\frac{d}{\sqrt{1-d^2}}\right)\sin\left(\omega_o\sqrt{1-d^2}\,t_{50}+\omega_o\sqrt{1-d^2}\,t_1\right)\right.$$

$$\left.-\cos\left(\omega_o\sqrt{1-d^2}\,t_{50}+\omega_o\sqrt{1-d^2}\,t_1\right)\right] \qquad \text{(A 4.4)}$$

Der störende Term

$$e^{-d\omega_o t_{50}}$$

läßt sich beseitigen, indem die sowohl für $h^*(t^*_{50})$ als auch $h(t_{50})$ geltende Bedingung $h^*(t^*_{50}) = h(t_{50}) = 0{,}5$ verwendet wird.

Nach Gleichsetzen von Gl.(A 4.1) und (A 4.4) erhalten wir:

$$\frac{-d}{\sqrt{1-d^2}}\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\,t_{50}-\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\,t_{50}$$

$$=e^{-d\omega t_1}\left[\left(\frac{1}{\kappa\sqrt{1-d^2}}-\frac{d}{\sqrt{1-d^2}}\right)\sin\left(\omega_o\sqrt{1-d^2}\,t_{50}+\omega_o\sqrt{1-d^2}\,t_1\right)\right.$$

$$\left.-\cos\left(\omega_o\sqrt{1-d^2}\,t_{50}+\omega_o\sqrt{1-d^2}\,t_1\right)\right].$$

Mit der Reihenentwicklung bis zum 1. Glied entsprechend den allgemeinen Beziehungen

$$\cos(x+\alpha) \approx \cos\alpha - x\sin\alpha$$

$$\sin(x+\alpha) \approx \sin\alpha + x\cos\alpha$$

folgt aus obiger Gleichung:

$$\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\ t_{50}\left[\frac{-d}{\sqrt{1-d^2}} - \left(\frac{1}{\kappa\sqrt{1-d^2}} - \frac{d}{\sqrt{1-d^2}} - \sqrt{1-d^2}\,\omega_o t_1\right) e^{-d\omega_o t_1}\right]$$

$$\approx \cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\ t_{50}\left[1 + \left(\left(\frac{1}{\kappa} - d\right)\omega_o t_1 - 1\right) e^{-d\omega_o t_1}\right]$$

oder

$$\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\ t_{50}\left[\frac{-\kappa d e^{d\omega_o t_1} - 1 + d\kappa - \kappa\omega_o t_1 + \kappa d^2\omega_o t_1}{\kappa\sqrt{1-d^2}}\right] e^{-d\omega_o t_1}$$

$$= \cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\ t_{50}\left[\frac{\kappa e^{d\omega t_1} + \omega_o t_1 - \kappa d\omega_o t_1 - \kappa}{\kappa}\right] e^{-d\omega_o t_1}.$$

Nach Entwicklung der Exponentialfunktion in eine Reihe und Abbruch nach dem ersten Glied ergibt sich

$$\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\ t_{50}\left[\frac{-\kappa d - d^2\kappa\omega_o t_1 - 1 + d\kappa - \kappa\omega_o t_1 + d^2\kappa\omega_o t_1}{\kappa\sqrt{1-d^2}}\right]$$

$$\approx \cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\ t_{50}\left[\frac{\kappa + \kappa d\omega_o t_1 + \omega_o t_1 - \kappa d\omega_o t_1 - \kappa}{\kappa}\right]$$

bzw.

$$\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\,t_{50}\ \frac{-(1+\kappa\omega_o t_1)}{\kappa\sqrt{1-d^2}} = \cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\ t_{50}\ \frac{\omega_o t_1}{\kappa}$$

und damit

$$\operatorname{arctg}\ \omega_o\sqrt{1-d^2}\ t_{50} = \frac{\omega_o t_1 \kappa\sqrt{1-d^2}}{-\kappa(1+\kappa\omega_o t_1)}.$$

Wird der arctg durch sein Argument ersetzt, erhalten wir

$$t_{50} \approx \frac{t_1}{1+\kappa\omega_o t_1}$$

bzw.

$$\frac{1}{t_1} = \frac{1}{t_{50}} - \kappa\omega_o \ .$$

Für große κ-Werte gilt näherungsweise

$$t_1 \approx \frac{-1}{\kappa\omega_o} \qquad \text{(A 4.5)}$$

und damit für die Verzugszeit des PT_2S-Glieds mit Nullstelle

$$t^*_{50} = t_{50} + t_1 = t_{50} - \frac{1}{\kappa\omega_o} \ . \qquad \text{(A 4.6)}$$

A.4.2. Der Zusammenhang für die Anstiegszeit T_{a50} für ein kontinuierliches PT_2S-Glied mit und ohne Nullstelle

Die Anstiegszeit T_{a50} bestimmt sich definitionsgemäß als Inverse der Gewichtsfunktion zum Zeitpunkt t_{50}

$$T_{a50} = \frac{1}{g(t_{50})} \ . \qquad \text{(A 4.7)}$$

Zur Annäherung der Anstiegszeit für ein PT_2S-Glied mit Nullstelle ist es sinnvoll, eine Annäherung der Gewichtsfunktion durchzuführen. Entsprechend Gl.(3.2.15) erhalten wir

$$g^*(t^*_{50}) = g(t^*_{50}) + \frac{1}{\kappa\omega_o}\,\dot{g}(t^*_{50}) \ . \qquad \text{(A 4.8)}$$

Mit der Beziehung gemäß Gl.(A 4.6) lassen sich sowohl $g(t^*_{50})$ als auch $\dot{g}(t^*_{50})$ um t_{50} in eine Potenzreihe entwickeln:

mit

$$g(t_{50}^*) \approx g(t_{50}) + \dot{g}(t_{50}) \cdot t_1 + \frac{\ddot{g}(t_{50})}{2} \cdot t_1^2 \qquad \text{(A 4.9a)}$$

und

$$\dot{g}(t_{50}^*) \approx \dot{g}(t_{50}) + \ddot{g}(t_{50}) \cdot t_1 \,. \qquad \text{(A 4.9b)}$$

Beide Potenzreihen werden nach der zweiten Ableitung der Gewichtsfunktion abgebrochen. Die Differenz zwischen der Gewichtsfunktion für ein PT_2S-Glied ohne Nullstelle mit der Gewichtsfunktion gemäß Gl.(A 4.8) unter Berücksichtigung der Reihenentwicklung liefert:

$$g^*(t_{50}^*) - g(t_{50}) \approx \dot{g}(t_{50}) \cdot t_1 + \frac{\ddot{g}(t_{50}) \cdot t_1^2}{2} + \frac{1}{\kappa\omega_o}(\dot{g}(t_{50}) + t_1\ddot{g}(t_{50})) \,.$$

Mit der Näherungsbeziehung für t_1 gemäß Gl.(A 4.5) erhalten wir

$$g^*(t_{50}^*) - g(t_{50}) \approx -\dot{g}(t_{50}) \cdot \frac{1}{\omega_o\kappa} + \frac{\ddot{g}(t_{50})}{2} \cdot \frac{1}{\omega_o^2\kappa^2} + \frac{1}{\kappa\omega_o}\,\dot{g}(t_{50}) - \frac{\ddot{g}(t_{50})}{\kappa^2\omega_o^2}$$

$$= -\frac{1}{2\kappa^2\omega_o^2}\,\ddot{g}(t_{50}) \,. \qquad \text{(A 4.10)}$$

Die Näherungsbeziehung für die Gewichtsfunktion gemäß Gl.(A 4.10) setzt die Kenntnis der zweiten Ableitung der Gewichtsfunktion voraus. Die zweite Ableitung der Gewichtsfunktion berechnet sich aus Gl. (3.2.9) zu

$$\ddot{g}(t) = \omega_o^3\, e^{-d\omega_o t}\left[\frac{2d^2-1}{\sqrt{1-d^2}}\,\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\;t - 2d\,\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\;t\right]. \qquad \text{(A 4.11)}$$

Die Differenz der Gewichtsfunktionen gemäß Gl.(A 4.10) bestimmt sich zu

$$g^*(t^*_{50}) - g(t_{50}) \approx -\frac{1}{2\kappa^2}\,\omega_o\, e^{-d\omega_o t_{50}} \left[\frac{2d^2-1}{\sqrt{1-d^2}}\,\sin\omega_o\sqrt{1-d^2}\;t_{50} - 2d\cos\omega_o\sqrt{1-d^2}\;t_{50}\right] \qquad \text{(A 4.12)}$$

oder

$$g^*(t_{50}) - g(t_{50}) = -\frac{1}{2\kappa^2}\,\omega_o\, e^{-d\omega_o t_{50}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-d^2}}\cos(\omega_o\sqrt{1-d^2}\;t_{50}-\varphi)\right]$$

mit

$$\varphi = \operatorname{arctg} -\frac{2d^2-1}{\sqrt{1-d^2}\;2d}\,. \qquad \text{(A 4.13)}$$

Bezeichnen wir die Differenz der Gewichtsfunktionen $g^*(t^*_{50})$ und $g(t_{50})$ mit Δg, so erhalten wir für die Anstiegszeit T^*_{a50}:

$$T^*_{a50} = \frac{1}{g^*(t^*_{50})} \approx \frac{T_{a50}}{\Delta g \cdot T_{a50}+1}\,. \qquad \text{(A 4.14)}$$

Die Näherungsformel für T_{a50} ist wesentlich komplizierter als die anderen Näherungsformeln. Der Grund liegt darin, daß für das Produkt $1{,}0 < \omega_o t_{50} < 1{,}7$ gilt und damit eine Reihenentwicklung kaum möglich ist.

A 5. Näherungsformeln zur Berechnung der Verzugszeit t_{50} und der Anstiegszeit T_{a50} für ein PT_2S-Glied ohne Nullstelle

Die Berechnung der Verzugszeit t_{50} und der Anstiegszeit kann mittels der in den obigen Abschnitten angegebenen Gleichungen erfolgen. In vielen Fällen genügt aber bereits die Genauigkeit von Faustformeln. Die bekannten Faustformeln (Unbehauen (1979), Landgraf und Schneider (1970)) sollen im folgenden aufgeführt und umgeformt werden, so daß sich Beziehungen für t_{50} und T_{a50} ergeben, die nur noch von der Eckfrequenz ω_o und der Dämpfung d abhängen. Mit der Bandbreite ω_b ergibt sich für Dämpfungswerte

$0,4 < d < 0,7$:

$$\omega_b T_{a50} \approx 2,3 \qquad \text{(A 5.1)}$$

$$\frac{\omega_b}{\omega_o} \approx 1,8 - 1,1d \qquad \text{(A 5.2)}$$

und damit für T_{a50}

$$T_{a50} \approx \frac{2,3}{(1,8-1,1d)} \cdot \qquad \text{(A 5.3)}$$

Für t_{50} gilt näherungsweise:

$$\frac{\omega_b t_{50}}{\varphi_b} \approx 0,8 \qquad \text{(A 5.4)}$$

oder etwas genauer

$$\frac{\omega_b t_{50}}{\varphi_b} = 0,57\ d + 0,51 \ . \qquad \text{(A 5.5)}$$

φ_b stellt den Winkel an der Stelle $\omega = \omega_b$ dar, und mit der Näherung

$$\varphi_b \approx \pi - 2,23\ d \qquad \text{(A 5.6)}$$

ergibt sich unter Verwendung von Gl.(A 4.17)

$$\omega_o t_{50} \approx \frac{0,8(\pi - 2,23d)}{(1,8 - 1,1d)} \qquad \text{(A 5.7)}$$

bzw. unter Verwendung von Gl.(A 5.5)

$$\omega_o t_{50} \approx \frac{(0,57d + 0,51)(\pi - 2,23d)}{1,8 - 1,1d} \; . \qquad \text{(A 5.8)}$$

Zusammenstellung der wichtigsten Formelzeichen

A	Nennerpolynom der Regelstrecke mit den Koeffizienten a_i
B	Zählerpolynom der Regelstrecke mit den Koeffizienten b_i
C	Zählerpolynom des Störfilters mit den Koeffizienten c_i
d	diskrete Totzeit, Dämpfung
E,e	gaußverteiltes weißes Rauschen
e_u	maximales Unterschwingen
e_{max}	maximales Überschwingen
f	kontinuierliche Nullstelle
$\underline{g}$	Kalman-Verstärkung
G	Übertragungsfunktion
g	Gewichtsfunktion
G_R	Übertragungsfunktion des Reglers
G_S	Übertragungsfunktion der Regelstrecke
G_W	Führungsübertragungsfunktion
G_Z	Störübertragungsfunktion
G_{ZS}	Übertragungsfunktion des Störmodells
G_o	Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises
H,h	Übergangsfunktion
k	diskrete Zeitvariable
K	Vorfaktor
$\underline{m}$	Signalvektor
$p,\overline{p}$	Polpaar des PT_2S-Glieds
$\underline{p}$	Parametervektor
Q	Zählerpolynom der Führungsübertragungsfunktion
R,R_1	Reglerpolynom
r_s,R_s	farbiges Rauschen
S,S_1	Reglerpolynom
T	Abtastzeit, Beobachterpolynom
T_1	Beobachterpolynom
T'	"virtuelle" Abtastzeit
T_{a50}	Anstiegszeit
$T_{3\%}$	Ausregelzeit

t_{max}	Zeit bis zum Erreichen des maximalen Überschwingens
t_u	Zeit bis zum Erreichen des maximalen Unterschwingens
t_{50}	Verzugszeit
U,u	Stellsignal
W,w	Sollwert
Y,y	Regelgröße
Z,z	Störgröße

α	Winkel
β	diskrete Nullstelle außerhalb des Einheitskreises
γ	Gewichtungsfaktor
$\underline{\Lambda}$	Kovarianzmatrix
ν	Zahl der Wurzeln bei $z = 1$
ϕ	Hilfssignal
ω_o	Eigenfrequenz des PT_2S-Glieds

Gerhard Nöth

LEBENSLAUF

23.10.1947	geboren in Stuttgart
1954 - 1958	Volksschule in Stuttgart
1958 - 1966	Mathematisch-Naturwissenschaftliches Gymnasium in Stuttgart
1966 - 1973	Studium der Elektrotechnik an der Universität Stuttgart
	Praktikum bei den Firmen Daimler Benz, Stuttgart, SEL, Stuttgart, Middle East Airlines, Beirut
März 1974 - August 1975	Graduiertenstipendiat an der Universität Stuttgart
September 1975	Wissenschaftlicher Mitarbeiter bei Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen, Universität Stuttgart
Oktober 1975 - Dezember 1981	Assistent bei Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum

Bochum, im Januar 1982

ifo druck
laubanger 15
8600 bamberg
tel.: 0951/64321